

# VEKTORANALYSIS – SOMMERSEMESTER 2010

## BLATT 7: KRUMMLINIGE KOORDINATEN; GRADIENT, DIVERGENZ UND ROTOR

### Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Mehrdimensionale Integrale:** Bei Flächenintegralen ist es häufig notwendig, an jedem Punkt der Fläche die Richtung eines Vektors in Bezug auf die Fläche zu berücksichtigen. Das kann z.B. dann wichtig sein, wenn der Vektor eine Strömung beschreibt. Das Integral

$$\iint dA \vec{n} \cdot \vec{F}(\vec{r}(u, v))$$

beschreibt so einen Fall. Dabei ist  $\vec{n}$  der Einheitsnormalenvektor auf das Flächenelement  $dA$  (die Größe  $\vec{n}dA \equiv d\vec{A}$  bezeichnet man als vektorielles Flächenelement).

Bestimmen Sie  $d\vec{A}$  für Kugelkoordinaten.

2. **Krummlinige Koordinaten:** Wie sieht der Laplace-Operator in einem allgemeinen orthornormalen Koordinatensystem aus?
3. **Divergenz und Rotor:** Veranschaulichen Sie sich den Unterschied zwischen  $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})$  und  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ .

### Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefällen schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen<sup>1</sup>, so werden Ihnen  $2^n$  Kreuze aberkannt, wobei  $n$  die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht präsentiert werden konnten.

1. **Mehrdimensionale Integrale:**

a) Der mit dem Temperaturfeld  $T$  verknüpfte Teilchenstrom der Sonne hat die Form:

$$\vec{F} = -\kappa \vec{\nabla} T(x_1, x_2, x_3), \quad \text{mit } T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{und} \quad \kappa = 1.$$

Berechnen Sie den Wärmestrom (senkrechter Durchsatz des Vektorfeldes) durch eine Kugeloberfläche mit  $r = 1$ .

---

<sup>1</sup>Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.

- b) Finden Sie die Masse  $m$  einer Kugeloberfläche  $S$  mit dem Radius  $R$ , sodass in jedem Punkt  $(x, y, z) \in S$  die Massendichte  $\rho$  gleich dem Abstand zu einem fixen Punkt  $\vec{r}_0 = (0, 0, R)^T \in S$  ist.

(Es gilt somit also  $\rho = |\vec{r} - \vec{r}_0|$  mit  $(x, y, z) \in S$  und  $m = \iint dA \rho$ ).

2. **Krummlinige Koordinaten:** Die stationäre Schrödingergleichung zur Beschreibung der (quantenmechanischen) Rutherfordstreuung besitzt die Form

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \right) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}),$$

wobei  $\hbar$ ,  $\mu$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $e$  und  $E$  Konstanten<sup>2</sup> sind und  $r = |\vec{r}|$  gilt.

Drücken Sie diese Gleichung in parabolischen Koordinaten  $(\xi, \eta, \phi)$  aus, welche durch

$$x_1 = \sqrt{\xi\eta} \cos \phi, \quad x_2 = \sqrt{\xi\eta} \sin \phi, \quad x_3 = \frac{\xi - \eta}{2},$$

gegeben sind.

3. **Divergenz und Rotor:**  $\vec{A}(\vec{r})$  und  $\vec{B}(\vec{r})$  seien zwei wirbelfreie Felder. Zeigen Sie, dass in diesem Fall  $\vec{A} \times \vec{B}$  divergenzfrei ist.

Berechnen Sie weiters für die Wahl

$$\vec{A} = (x^2 z, y z^3, -3xy)^T, \quad \vec{B} = (y^2, -yz, 2x), \quad \phi = 2x^2 + yz$$

zumindest drei der folgenden Ausdrücke:

- a)  $\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \phi)$ ,                      b)  $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \phi$ ,                      c)  $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$ ,  
d)  $\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})$ ,                      e)  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B}$ .

4. **Divergenz und Rotor in krummlinigen Koordinaten:** Zeigen Sie, dass die paraboloidischen Koordinaten  $\{u, v, \phi\}$  mit

$$x = uv \cos \phi, \quad y = uv \sin \phi, \quad z = \frac{1}{2} (u^2 - v^2),$$

ein orthonormales Koordinatensystem bilden. Berechnen Sie anschließend die Divergenz und den Rotor der Funktion

$$\vec{A}(u, v, \phi) = \frac{u^2 + v^2}{u} \vec{e}_u - \frac{u^2 + v^2}{v} \vec{e}_v + uv \phi \vec{e}_\phi$$

in diesen Koordinaten.

---

<sup>2</sup> $\hbar$  ist das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum ( $\hbar = h/2\pi$ ),  $\mu$  ist die reduzierte Masse,  $e$  ist die Elementarladung,  $Z_1 e$  bzw.  $Z_2 e$  entsprechen der Ladung des gestreuten Teilchens bzw. der Ladung des Atomkerns und  $E$  ist die Gesamtenergie.  $\Psi(\vec{r})$  ist die sogenannte Wellenfunktion, mehr dazu lernen Sie in den Vorlesungen zur Quantenmechanik.