Vektoranalysis – Sommersemester 2010
Blatt 8: Krummlinge Koordinaten, Gaussscher Integralsatz

Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Satz von Gauß:** Formuliern Sie den Gaußschen Integralsatz für den Spezialfall eines würfelförmigen Gebietes (z.B. $0 \leq x, y, z \leq 1$). Wie schauen insbesondere die Normalvektoren der einzelnen Randflächen aus?

2. **Satz von Gauß:** Formuliern Sie den Gaußschen Integralsatz für den Spezialfall eines kugelförmigen Gebietes ($x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$). Benutzen Sie dazu Kugelkoordinaten.

Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefällen schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen[1], so werden Ihnen 2^n Kreuze aberkannt, wobei n die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht nicht präsentiert werden konnten.

1. **Polarkoordinaten 1:** Zeigen Sie, dass die Ableitungen eines Vektors $\vec{r}(t)$ in Polarkoordinaten (im $\mathbb{R}^2$) folgende Form haben

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e_\varphi}.\end{aligned}$$

2. **Polarkoordinaten 2:** Gegeben ist eine spiralförmige Bahnkurve im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = \exp(t)\cos\Big(2t + \frac{\pi}{2}\Big)\,\vec{e_x} + \exp(t)\sin\Big(2t + \frac{\pi}{2}\Big)\,\vec{e_y}.$$

Stellen Sie die Position $\vec{r}(t)$, die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$ in Polarkoordinaten $\vec{e_r}$, $\vec{e_\varphi}$ dar. Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit $\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|$.

Bestimmen Sie außerdem das Wegintegral

$$\int r\vec{e_\varphi}d\vec{s}.$$

zwischen den Punkten $\vec{r}(0)$ und $\vec{r}(3\pi)$

[1] Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.

3. **Satz von Gauß:** Verifizieren Sie den Satz von Gauß für die Flussfunktion

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy+1 \\ x+y^2 \\ x+z \end{pmatrix}$$

und einer Pyramide mit Eckpunkten $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ als Integrationsgebiet.

4. **Satz von Gauß:** Überprüfen Sie den Gaußschen Integralsatz für das Gebiet

$$x^2 + y^2 \leq (1-z)^2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

und die Flussfunktion

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (1-z^2) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ (1-z^2) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1-z^2. \end{pmatrix}$$

5. **Oberflächenintegral (indirekt):** Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \sin^2(z) \\ z^2+1 \end{pmatrix}$$

durch die halbe Kugelsphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

Hinweis: Wenden Sie den Gaußschen Integralsatz auf die Halbkugel an um das Oberflächenintegral indirekt zu berechnen.