Vektoranalysis – Sommersemester 2010
Blatt 9: Sätze von Gauss und Green

Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Kurvenintegrale:** Wie hängen Kurvenintegrale der Form

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

   mit den bisher betrachteten Kurvenintegralen

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \vec{F} \cdot \dot{\vec{c}}(t)\,dt$$

   zusammen?

2. **Kurvenintegrale:** Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C e^y\,dx + (x+3)\,dy$$

   entlang der Kurven

   - Gerade zwischen den Punkten $(0,0)$ und $(1,2)$.
   - parametrisierte Kurve $\vec{c}(t) = (t^2, t) \quad 0 \le t \le 1$

3. **Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$:** Nicht zum "Aufwärmen" geeignet, aber sicher lehrreich: Formulieren und Lösen Sie die Ankreuzbeispiele 1 und 2 auch für den zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$. In Beispiel 1 sollte dazu die Funktion u durch

$$u(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3\ln\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)$$

   ersetzt werden.

Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefällen schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen[1], so werden Ihnen 2^n Kreuze aberkannt, wobei n die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht nicht präsentiert werden konnten.

[1] Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.

1. **Satz von Gauß mit Singularität:** Sei F eine geschlossene, glatte Fläche im $\mathbb{R}^3$, sodass der Punkt $(0,0,0)$ von F eingeschlossen wird und der Punkt $(1,1,1)$ außerhalb liegt, zum Beispiel eine Kugelsphäre um den Mittelpunkt $(0,0,0)$ mit Radius 1. Gegeben ist die Potentialfunktion

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{3}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}}.$$

   Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes ∇u durch die Fläche F.

2. **Variationsformulierung des Poisson-Randwertproblems:** Sei Ω ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet im $\mathbb{R}^3$. Weiter sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung

$$-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}) \qquad \text{für alle } \vec{x} \in \Omega$$

   mit der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = g(\vec{x}) \qquad \text{für alle Punkte am Rand } \vec{x} \in \partial\Omega.$$

   Zeige, dass für jede stetig differnzierbare Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dV = \int_\Omega f v \, dV + \int_{\partial\Omega} g v \, dA$$

   gilt.

   Hinweis: Beginne mit dem Integral

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u \cdot v) \, dV$$

   und wende den Satz von Gauß bzw. die Produkt-Differentiationsregel auf den Integranden an.

3. **Kurvenintegral 1:** Gegeben ist eine ebene, geschlossene Kurve

$$\vec{c}(t) = \begin{cases} (t, \sin(t)) & 0 \le t \le \pi \\ (2\pi - t, \sin(t)) & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

   Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_C xy \, dx + y \, dy$$

   (a) direkt und (b) mit dem Satz von Green.

4. **Kurvenintegral 2:** Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_C y \, dx + 1 \, dy + z \, dz$$

   entlang der Schnittkurve von

$$\begin{gathered} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ y = z. \end{gathered}$$