Vektoranalysis – Sommersemester 2010
Blatt 10: Kurven- und Oberflächenintegrale, Integralsätze, Vierdimensionales

Aufwärmbeispiele

1. **Mehrfache Differenzialoperatoren:** Rechnen Sie für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{V}$ die Beziehung
$$\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{V} = 0$$
explizit nach. (Hinweis: Das kann auch in Indexschreibweise erfolgen.) Welche Folgerungen kann man mit dem Satz von Gauß für Integrale der Form $\oiint_{\mathcal{F}} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{dA}$ ziehen?

2. **Spezialfall für das Flächenelement:** Zeigen Sie, dass, wenn sich eine Fläche in der Form $z = z(x,\, y)$ schreiben lässt, das Oberflächenelement die Form
$$\boldsymbol{dA} = \pm \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x, y)$$
hat. (Das Vorzeichen ist je nach gewünschter Orientierung der Fläche zu wählen.)

3. **Integralsätze:** Überlegen Sie, welche der Integrale in den Ankreuzbeispielen 1 bis 4 durch Integralsätze verknüpft sind und benutzen Sie diese Zusammenhänge zum Abkürzen bzw. zur Kontrolle Ihrer Rechnungen.

Ankreuzbeispiele

1. **Kurvenintegral:** Die beiden Flächen
$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_1 : z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0 \qquad \text{und} \\ &\mathcal{F}_2 : z = 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{aligned}$$
schneiden sich in einer Kurve C. Geben Sie für diese Kurve eine geeignete Parametrisierung an und bestimmen Sie für das Vektorfeld
$$\boldsymbol{V} = (x - y - z)\, \hat{\boldsymbol{e}}_x + (x + y + z)\, \hat{\boldsymbol{e}}_y + xyz\, \hat{\boldsymbol{e}}_z$$
das Kurvenintegral
$$\oint_C \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{ds}\,.$$

2. **Oberflächenintegrale:** Gegeben sind die drei Flächenstücke
$$\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{F}}_1^+ : z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\,, \\ &\tilde{\mathcal{F}}_2^+ : z = 1 - 2x^2 - 2y^2,\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \qquad \text{und} \\ &\tilde{\mathcal{F}}_3^+ : z = \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\,, \end{aligned}$$

die jeweils so orientiert sind, dass die z-Komponente des Normalenvektors positiv ist (angedeutet durch das hochgestellte $+$). Bestimmen Sie für

$$\boldsymbol{V} = (x - y - z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + (x + y + z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + xyz\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

und $\boldsymbol{R} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}$ die Oberflächenintegrale

$$\iint_{\tilde{\mathcal{F}}_i^+} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{dA} \qquad \text{und} \qquad \iint_{\tilde{\mathcal{F}}_i^+} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{dA}\,, \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

3. **Volumsintegrale:** Die beiden Flächenstücke

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{F}}_1 : z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le \frac{1}{2} \qquad \text{und} \\ &\tilde{\mathcal{F}}_2 : z = 1 - 2x^2 - 2y^2,\ \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{aligned}$$

begrenzen einen Körper B. Bestimmen Sie dessen Volumsinhalt V_B sowie das Integral

$$\iiint_B (2 + xy)\,\mathrm{d}(x, y, z)\,.$$

4. **Oberflächeninhalt und Flüsse:** Die beiden Flächenstücke

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{F}}_1 : z^2 = x^2 + y^2,\ \ 0 \le z \le \frac{1}{2} \qquad \text{und} \\ &\tilde{\mathcal{F}}_2 : z = 1 - 2x^2 - 2y^2,\ \ \frac{1}{2} \le z \le 1 \end{aligned}$$

begrenzen einen Körper B. Bestimmen Sie dessen Oberflächeninhalt sowie den Fluss der Vektorfelder

$$\boldsymbol{V} = (x - y - z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + (x + y + z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + xyz\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

und $\boldsymbol{R} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}$ durch dessen Oberfläche (Normalenvektor nach außen gerichtet),

$$\oiint_{\partial B} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{dA} \qquad \text{und} \qquad \oiint_{\partial B} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{dA}\,.$$

5. **Vierdimensionale Kugelkoordinaten:** Führen Sie im $\mathbb{R}^4$ vierdimensionale Kugelkoordinaten ein, in denen ein Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ durch den Radialabstand $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ und drei Winkel beschrieben wird. (Hinweis: Zerlegen Sie $\boldsymbol{x}$ in die Projektion in den 1-2-3-Unterraum und die Projektion auf die 4-Achse. Beschreiben Sie den 1-2-3-Anteil in dreidimensionalen Kugelkoordinaten und fassen Sie anschließend beide Projektionen durch Einführen einer weiteren Winkelvariablen zusammen.)

   Bestimmen Sie für die vierdimensionalen Kugelkoordinaten die Basisvektoren, die metrischen Koeffizienten und das Volumselement. Wie könnte das Oberflächenelement für eine Hyperkugel mit Radius R,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2\,,$$

   aussehen? Bestimmen Sie den (vierdimensionalen) Hypervolumsinhalt $V_4(R)$ und (dreidimensionalen) Hyperoberflächeninhalt $A_4(R)$ dieser Hyperkugel. Durch welchen Zusammenhang sind $V_4(R)$ und $A_4(R)$ verknüpft?