Vektoranalysis – Sommersemester 2010

Blatt 11: Param. von Kurven und Flächen, krummlinige Koordinaten, Kurven- und Oberflächenintegrale

Aufwärmbeispiel

1. **Wegunabhängigkeit und Potenzial:** Wie lauten die Bedingungen für die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegrale in zwei, drei und allgemein n Dimensionen? Wie sind Kurvenintegrale über konservative Felder und die zugehörigen Potenziale dieser Felder verknüpft?

Ankreuzbeispiele

1. **Parametrisierung von Kurven und Flächen:** Finden Sie für *zumindest eine* der nachfolgend angegebenen Kurven bzw. Flächen eine möglichst einfache Parametrisierung. Bestimmen Sie den Tangentenvektor an die Kurve bzw. den Normalvektor der Fläche:

   (a) Schnittkurve der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$ mit der Ebene $x + z = 1$

   (b) Fläche, die entsteht, wenn die Kurve

   $$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

   um die z-Achse rotiert.

   (c) Fläche, die entsteht, wenn die Kurve

   $$x^2 + \frac{1}{4}z^2 = 4, \; y = 0$$

   um die z-Achse rotiert.

2. **Vektorfelder und Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten:** Stellen Sie in *mindestens einem* der folgenden Fällen das Skalarfeld Φ und das Vektorfelder $\boldsymbol{V}$ im jeweils angegebenen Koordinatensystem dar (d.h. insbesondere soll das Vektorfeld in der Form $\boldsymbol{V} = V_{u_1}\hat{\boldsymbol{e}}_{u_1} + V_{u_2}\hat{\boldsymbol{e}}_{u_2} + V_{u_3}\hat{\boldsymbol{e}}_{u_3}$ geschrieben werden) und bestimmen Sie $\mathbf{grad}\,\Phi$, $\Delta\Phi$, $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}$ sowie $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$:

   (a) in Zylinderkoordinaten:

   $$\Phi(\boldsymbol{x}) = xyz \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x^2 - xy \\ x^2 + xy \\ x^2 z \end{pmatrix}$$

   (b) in Kugelkoordinaten:

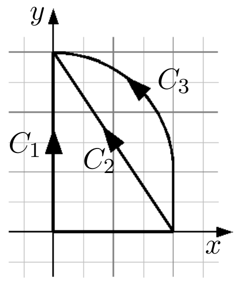
   $$\Phi(\boldsymbol{x}) = xyz \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) in parabolischen Koordinaten (vgl. Aufgabe 7.4):

$$x = uv\cos\varphi, \qquad y = uv\sin\varphi, \qquad z = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)$$

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. **Kurven und Kurvenintegrale in der Ebene:**



Parametrisieren Sie die drei rechts dargestellten Kurven C_1, C_2 und C_3, die jeweils den Anfangspunkt $(2, 0)$ und den Endpunkt $(0, 3)$ haben:

- C_1: zwei Geradenstücke entlang der Achsen
- C_2: Verbindungsstrecke
- C_3: Geradenstück mit anschließendem positiv orientiertem Viertelkreis

Bestimmen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{C_i} \boldsymbol{V}^{(k)} \cdot \boldsymbol{ds}, \qquad i = 1, 2, 3\,,$$

für *zumindest eines* der folgenden Vektorfelder:

$$\boldsymbol{V}^{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{V}^{(2)}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 2xy + 2 \\ 2x^2y + x^2 + 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}^{(3)}(x,y) = \frac{1}{\{(x-2)^2 + (y-3)^2\}^{3/2}}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

4. **Kurven und Kurvenintegrale im Raum:** Eine Kurve C verbindet die Punkte $(1, 0, 0)$ und $(0, 0, 2)$ auf folgende Weise:

- von $(1, 0, 0)$ nach $(0, 1, 0)$ in einem Viertelkreis,
- von $(0, 1, 0)$ nach $(0, 1, 1)$ mit einem Geradenstück,
- von $(0, 1, 1)$ nach $(0, 0, 2)$ in einem Viertelkreis

Skizzieren Sie die Kurve, geben Sie eine (nicht notwendigerweise durchgehende) Parametrisierung an und bestimmen Sie *zumindest eines* der beiden Kurvenintegrale

$$I_1 = \int_C \left\{x^2yz\,\mathrm{d}x + xy^2z\,\mathrm{d}y + xyz^2\,\mathrm{d}z\right\},$$

$$I_2 = \int_C \left\{x\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z\right\}.$$

5. **Kurven- und Oberflächenintegrale:** Bestimmen Sie für das Vektorfelder

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2y \\ x^2z \end{pmatrix}$$

mindestens eines der folgenden Integrale über eine geschlossene Kurve bzw. Fläche:

(a) Integral von $\boldsymbol{V}$ entlang der Schnittkurve von $x^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $y = z$.

(b) Fluss von $\boldsymbol{V}$ durch die nach außen orientierte Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.