Bogenlänge ebener Kurven

Hat man eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben, dann stellt der Graph von f ,

$$C_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x) \ , \ x \in [a, b]\} \ ,$$

i.a. eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ dar.

Einer derartigen Kurve soll nun eine "Länge" zugeordnet werden, wobei zu beachten ist, dass a priori nur für Strecken bzw. (in weiterer Folge für) Polygonzüge im $\mathbb{R}^2$ eine Länge erklärt ist.

Sei $P = \{a = x_0 \ , \ x_1, \ldots, x_n = b\}$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$. Jedem Punkt x_k entspricht dann ein Punkt $P_k = (x_k, f(x_k))$ von C_f .

Für den durch die Punkte $P_0, P_1, ..., P_n$ definierten Polygonzug ist eine Länge definiert, nämlich

$$L_P(C_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \ .$$

Der Polygonzug stellt eine Approximation von C_f dar und seine Länge eine Approximation für die Länge der Kurve, - falls diese überhaupt existiert !

Bemerkung. Ist P' eine Verfeinerung von P , dann gilt $L_{P'}(C_f) \geq L_P(C_f)$. (Beweis trivial)

Bei einer Verfeinerung der Partition wird also die Länge des zugehörigen Polygonzuges größer. Somit besteht die Möglichkeit, dass die Menge der Längen der Polygonzüge unbeschränkt ist.

Definition.

(i) Die Kurve C_f heißt **rektifizierbar**, wenn $\sup\limits_P L_P(C_f) < \infty$,

(ii) Ist C_f rektifizierbar, dann heißt $L(C_f) = \sup\limits_P L_P(C_f)$ die **Bogenlänge** von C_f .

Rektifizierbare Kurven sind also jene Kurven, denen eine Länge zugeordnet werden kann. Die obige Definition liefert kein wirklich handliches Kriterium zur tatsächlichen Bestimmung der Bogenlänge. Im folgenden betrachten wir daher den Spezialfall von Kurven C_f im $\mathbb{R}^2$ mit stetig differenzierbarer Funktion f . (Die allgemeine Frage der Rektifizierbarkeit von Kurven (im $\mathbb{R}^n$) wird auf später verschoben.)

Zwischenbemerkung. (Riemannsche Summen)

Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $P = \{a = x_0 \ , \ x_1, \ldots, x_n = b\}$ eine Partition von $[a,b]$.

Für Zwischenpunkte $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ heißt

$\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\Delta x_k$ eine **Riemannsche Summe** bzgl. der Partition P

Es gilt: Ist $\varphi(x)$ integrierbar, dann streben die Riemannschen Summen (bei Verfeinerung der Partitionen) gegen

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx \ .$$

Satz. Falls f stetig differenzierbar auf $[a,b]$ ist, dann ist C_f rektifizierbar und es gilt

$$L(C_f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \ .$$

Beweis. Sei $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$. Dann gilt

$$L_P(C_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\tfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\Delta x_k \ .$$

Mit dem 1. MWS der Differentialrechnung existieren dann weiters geeignete $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ mit

$$L_P(C_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k \ .$$

Die rechte Seite stellt eine Riemannsche-Summe der stetigen (und damit integrierbaren) Funktion $\varphi(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ zur Partition P dar, wobei $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ die Menge der Zwischenpunkte bezeichnet.

Daraus folgt weiters, dass

$$L(C_f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \ . \quad \square$$

Beispiele.

1) $f(x) = \cosh x$, $a \leq x \leq b$, C_f ... Kettenlinie

$$L(C_f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int\limits_a^b \cosh x dx = \sinh x\big|_a^b = \sinh b - \sinh a \ .$$

2) $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq A$.

$L(C_f) = \int\limits_1^A \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$. Substitution $x = \frac{1}{\sinh \xi}$ $\Rightarrow$

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \sqrt{1 + \sinh^2 \xi} \left(-\frac{\cosh \xi}{\sinh^2 \xi}\right) d\xi = -\int \frac{\cosh^2 \xi}{\sinh^2 \xi} d\xi =$$

$$= -\int \frac{1 + \sinh^2 \xi}{\sinh^2 \xi} d\xi = -\int \frac{1}{\sinh^2 \xi} d\xi - \int d\xi = \coth \xi - \xi = \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi} - \xi =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \sinh^2 \xi}}{\sinh \xi} - \xi = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} - \operatorname{arsinh} \frac{1}{x} = \sqrt{1 + x^2} - \operatorname{arsinh} \frac{1}{x}$$

Also ist $L(C_f) = \sqrt{1 + A^2} - \operatorname{arsinh} \frac{1}{A} - \sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1$.

3) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ ... oberer Halbkreisbogen des Einheitskreises

Betrachte die Punkte $P_0(0, 1)$ und $P_x(x, \sqrt{1 - x^2})$, wobei $0 < x < 1$.

Für die Länge des Bogens $\widehat{P_0 P_x}$ gilt dann

$$L(\widehat{P_0 P_x}) = \int\limits_0^x \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1 - \xi^2}} d\xi = \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \ .$$

Für $x \to 1$ wird der Integrand unbeschränkt, daher liegt kein Riemann-Integral im bislang definierten Sinne vor. Es liegt nahe, den Begriff des

Riemann-Integrals so zu erweitern, dass auch derartige Fälle behandelt werden können $(\rightarrow$ "uneigentliche Integrale") .

Bogenlänge ebener Kurven in Polarkoordinaten.

Wir betrachten Abbildungen $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_0^+$ und deuten $\varphi \in [\alpha, \beta]$ als Winkel zwischen einem Strahl durch den Ursprung und der x-Achse und r als Entfernung eines gegebenen Punktes P der Ebene zum Ursprung (vgl. Polardarstellung komplexer Zahlen) .

$C_r = \{(\varphi, r) \ : \ r = r(\varphi) \ , \ \varphi \in [\alpha, \beta]\}$ ist dann i.a. eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

Wir betrachten eine Partition $P = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ von $[\alpha, \beta]$, verbinden die Punkte $P_k(\varphi_k, r(\varphi_k))$ durch Strecken und erhalten einen Polygonzug.

Nach dem Cosinus-Satz ist die Länge des Polygonzuges

$$L_P(C_r) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{r^2(\varphi_k) + r^2(\varphi_{k-1}) - 2r(\varphi_k)r(\varphi_{k-1})\cos(\Delta\varphi_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(r(\varphi_k) - r(\varphi_{k-1}))^2 + 2r(\varphi_k)r(\varphi_{k-1})(1 - \cos(\Delta\varphi_k))} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{r(\varphi_k) - r(\varphi_{k-1})}{\Delta\varphi_k}\right)^2 + 2r(\varphi_k)r(\varphi_{k-1})\frac{1-\cos(\Delta\varphi_k)}{(\Delta\varphi_k)^2}}\Delta\varphi_k$$

Dieser Ausdruck strebt für $|P| \to 0$ gegen

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)}d\varphi \quad , \text{ weil } \frac{1-\cos(\Delta\varphi_k)}{(\Delta\varphi_k)^2} \to \frac{1}{2} \text{ . Somit ist}$$

$$L(C_r) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi \ .$$

Beispiel. $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, C_r ... Kardiode

$$L(C_r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\varphi}{2}}d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} 2\left|\cos\tfrac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi} \cos\tfrac{\varphi}{2}d\varphi - 2\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos\tfrac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 4\sin\tfrac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - 4\sin\tfrac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 8 \ .$$

Bogenlänge ebener Kurven in Parameterdarstellung.

Wir betrachten eine Abbildung $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

Dann ist $C = \{(x(t), y(t)) \ : \ a \le t \le b\}$ eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

Wir betrachten eine Partition $P = \{a = t_0, \ldots, t_n = b\}$ von $[a,b]$, verbinden die Punkte $P_k(x(t_k), y(t_k))$ durch Strecken und erhalten einen Polygonzug, dessen Länge durch

$$L_P(C) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\tfrac{x(t_k)-x(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\tfrac{y(t_k)-y(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right)^2} \ \Delta t_k$$

gegeben ist. Dieser Ausdruck strebt gegen $\int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \ dt$ und somit ist

$$L(C) = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \ dt \ .$$

Beispiel. $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ und $0 \le t \le 2\pi$.

$\dot{x} = -\sin t$, $\dot{y} = \cos t$, $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1$

Also ist $L(C) = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$.