Uneigentliche Integrale

Bislang betrachteten wir Riemann-Integrale $\int\limits_a^b f(x)dx$ unter den Voraussetzungen, dass a, b endlich waren und f beschränkt auf $[a, b]$.

Wir suchen nun Erweiterungen des Riemann-Integrals (falls möglich) auf unbeschränkte Integrationsintervalle bzw. auf unbeschränkte Funktionen.

Definition. (Uneigentliche Integrierbarkeit)

1) Sei $-\infty < a < b \leq +\infty$. f heißt uneigentlich integrierbar auf $[a, b)$, wenn f auf jedem Intervall $[a, B] \subseteq [a, b)$ R-integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{B \to b^-} \int\limits_a^B f(x)dx = \int\limits_a^{b^-} f(x)dx \quad \text{existiert.}$$

Hier ist also die obere Grenze b eine "kritische Stelle". Es könnte etwa $b = +\infty$ sein oder $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$.

2) Sei $-\infty \leq a < b < +\infty$. f heißt uneigentlich integrierbar auf $(a, b]$, wenn f auf jedem Intervall $[A, b] \subseteq (a, b]$ R-integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{A \to a^+} \int\limits_A^b f(x)dx = \int\limits_{a^+}^b f(x)dx \quad \text{existiert.}$$

3) Sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. f heißt uneigentlich integrierbar auf (a, b) , wenn für ein $c \in (a, b)$ die Funktion f auf $(a, c]$ **und** auf $[c, b)$ uneigentlich integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{a^+}^c f(x)dx + \int\limits_c^{b^-} f(x)dx \ .$$

4) Sei f auf (a, b) bis auf endlich viele Stellen $c_1, c_2, ..., c_n$ erklärt. Dann heißt f uneigentlich integrierbar auf (a, b) , wenn f auf (a, c_1) , (c_1, c_2) , ... , (c_n, b) uneigentlich integrierbar ist und wir setzen

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a^+}^{c_1^-} f(x)dx + \int_{c_1^+}^{c_2^-} f(x)dx + ... + \int_{c_{n-1}^+}^{c_n^-} f(x)dx + \int_{c_n^+}^{b^-} f(x)dx \ .$$

5) Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ bis auf die Stelle $c \in (a,b)$ erklärt. Existiert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right\} ,$$

dann heißt dieser Grenzwert **Cauchy-Hauptwert** .

Bemerkungen.

(i) In 3) kann c beliebig gewählt werden.

(ii) Aus der Existenz des Cauchy-Hauptwertes folgt i.a. **nicht** die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x)dx$, weil im allgemeinen

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \neq \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right\} .$$

(iii) Ist f R-integrierbar auf $[a,b]$, dann auch uneigentlich integrierbar auf (a,b) .

Beispiele.

1) Betrachte $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Für $0 < A < 1$ gilt

$$\int_A^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\ln A & \text{wenn } \alpha = 1 \\ \frac{1-A^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{wenn } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $\lim_{A \to 0} \int_A^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ genau dann existiert, wenn $\alpha < 1$.

Also $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ für $\alpha < 1$.

2) Betrachte $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Für $B > 1$ gilt

$$\int\limits_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln B & \text{wenn } \alpha = 1 \\ \frac{B^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{wenn } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $\lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_1^B \frac{dx}{x^\alpha}$ genau dann existiert, wenn $\alpha > 1$.

Damit $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$.

3) Betrachte $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Für $0 < B < 1$ gilt

$$\int\limits_0^B \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^B = -2\sqrt{1-B} + 2 .$$

Damit $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{B\to 1} \int\limits_0^B \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$.

Ein wichtiges Kriterium zur Bestimmung der Konvergenz eines uneigentlichen Integrals ist das Vergleichskriterium. Wir betrachten es für uneigentliche Integrale vom Typ $\int\limits_a^{b^-} f(x)dx$ (andere Typen analog).

Satz. (Vergleichskriterium)

Die Funktionen f und g seien R-integrierbar auf jedem Intervall $[a, B] \subseteq [a, b)$ und es gelte $0 \leq f(x) \leq g(x)$ auf $[a, b)$.

Existiert $\int\limits_a^{b^-} g(x)dx$, dann auch $\int\limits_a^{b^-} f(x)dx$ und es gilt

$$\int\limits_a^{b^-} f(x)dx \leq \int\limits_a^{b^-} g(x)dx .$$

Beweis. Die Funktionen $F(B) = \int\limits_a^B f(x)dx$ und $G(B) = \int\limits_a^B g(x)dx$ sind auf (a, b) monoton wachsend und es gilt

$$0 \leq F(B) \leq G(B) \leq \lim_{B \to b^-} G(B) = \int\limits_a^{b^-} g(x)dx \ .$$

Da $F(B)$ monoton wachsend ist und wegen vorher auch nach oben beschränkt ist, existiert $\lim\limits_{B \to b^-} F(B)$ und es gilt

$$\int\limits_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{B \to b^-} F(B) \leq \lim_{B \to b^-} G(B) = \int\limits_a^{b^-} g(x)dx \ . \quad \square$$

Beispiel. Wir betrachten das frühere Beispiel betreffend die Länge des Einheitskreisbogens $L(\widehat{P_0 P_x}) = \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, $x \in [0, 1)$.

Weil $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\xi}}$ und weil $\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}}$ existiert, existiert nach dem Vergleichskriterium auch $\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ und stellt damit die Länge des Einheitskreisbogens im 1. Quadranten dar.