Kurven

Der Begriff der Kurve, zunächst etwa im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, kann auf zwei Arten gebildet werden. Der **geometrische Zugang** definiert eine Kurve als den geometrischen Ort von Punkten in der Ebene bzw. im Raum, der durch gewisse Eigenschaften festgelegt ist, - wie etwa ein Kreis in der Ebene als Menge aller Punkte (der Ebene) festgelegt ist, welche einen konstanten Abstand zu einem festen Punkt haben.

Der **kinematische Zugang** definiert eine Kurve als "Bahnkurve" eines bewegten Punktes, wobei die Bewegung durch eine Gesetzmäßigkeit festgelegt ist, - wie etwa im Falle der Archimedischen Spirale, bei der ein Punkt auf einem gleichförmig rotierenden Strahl sich gleichförmig nach außen bewegt.

Mit der Einführung der analytischen Geometrie durch Descartes lassen sich Kurven durch analytische Beziehungen zwischen den Koordinaten ihrer Punkte (und damit durch Funktionen) beschreiben.

Für ebene Kurven (Kurven im $\mathbb{R}^2$) existieren etwa

(i) die **explizite Darstellung** $y = f(x)$ bzw. $x = g(y)$

(ii) die **Polarkoordinatendarstellung** $r = r(\varphi)$

(iii) die **implizite Darstellung** $F(x, y) = 0$

(iv) die **Parameterdarstellung** $x = x(t)$, $y = y(t)$

Raumkurven (Kurven im $\mathbb{R}^3$) lassen sich oft auch als Schnittlinien von Flächen im $\mathbb{R}^3$ definieren. Für eine Verallgemeinerung auf Kurven im $\mathbb{R}^n$ eignet sich am besten die Parameterdarstellung.

Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Die Menge $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, t \in I \text{ mit } x = f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))\}$ heißt **Kurve** im $\mathbb{R}^n$.

Ist $I = [a, b]$ und $f(a) = f(b)$, dann heißt K eine **geschlossene** Kurve.

Ist f injektiv, dann heißt K eine **Jordan-Kurve**.

Bemerkungen.

1) Eine Kurve K im $\mathbb{R}^n$ ist also die Bildmenge einer stetigen Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$. Die Abbildung f ist dabei eine Parametrisierung von K .

Dies legt nahe, dass eine Kurve K auch auf verschiedene Arten parametrisiert werden kann.

Im Falle einer Jordan-Kurve liegt eine Parametrisierung vor, wo jedem Kurvenpunkt genau ein Parameterwert entspricht.

2) Der Graph einer Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ ist eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^2$ durch $f_1(t) = t$, $f_2(t) = g(t)$.

3) Eine Parameterdarstellung induziert (wegen der Ordnung auf I) auf K einen Durchlaufsinn bzw. Orientierung. Ist etwa $I = [a, b]$, dann heißt $f(a)$ der **Anfangspunkt** und $f(b)$ der **Endpunkt** von K .

4) Da ein Punkt des $\mathbb{R}^n$ auch durch seinen Ortsvektor bestimmt ist, verwendet man oft auch die vektorielle Darstellung einer Kurve K : $\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$.

Beispiele.

i) Sei $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$.

K ist dann der obere Teil des Einheitskreises und ist eine Jordan-Kurve.

ii) Sei $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $t \in [-1, 1]$.

K ist dann ebenfalls der obere Teil des Einheitskreises.

iii) Sei $f_1(t) = r \cos t$, $f_2(t) = r \sin t$, $f_3(t) = ct$, $r, c > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

K ist dann eine Schraublinie und ist auch eine Jordan-Kurve.

Wie oben ersichtlich, kann eine Kurve K verschiedene Parameterdarstellungen haben.

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellungen.

Gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ mit

$\varphi'(t) > 0$ auf $[a,b]$ (und damit ist φ bijektiv) , $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ sowie $f(t) = g(\varphi(t))$ $\forall\, t \in [a,b]$, dann heißen die beiden Parameterdarstellungen **äquivalent** .

Man beachte, dass äquivalente Parameterdarstellungen ein und dieselbe Kurve darstellen. Auch die Orientierung bleibt gleich. Unterschiedlich ist die "Durchlaufgeschwindigkeit". Wählt man ein φ mit $\varphi'(t) < 0$, dann kehrt sich die Orientierung von K um.

Sei nun eine Kurve K in vektorieller Darstellung $\vec{f}(t)$, $t \in [a,b]$ mit differenzierbaren Komponentenfunktionen $f_i(t)$ gegeben. Dann ist

$$\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h} = \left(\frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h}, \cdots, \frac{f_n(t+h)-f_n(t)}{h}\right) .$$

Der Grenzübergang $h \to 0$ liefert $\vec{f}'(t) = \frac{d\vec{f}}{dt}(t) = (f_1'(t), \cdots, f_n'(t))$.

Im Falle $\vec{f}'(t) \neq 0$ kann dieser Vektor normiert werden (zur Länge 1), und

$$\vec{T}_f(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$$

heißt dann der **Einheits-Tangentenvektor** im Punkt $f(t)$ bezüglich der Darstellung $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Die Gerade $\vec{x} = \vec{f}(t) + \lambda \vec{f}'(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Tangente** an die Kurve K im Punkt $f(t)$.

Bemerkung. Äquivalente Parameterdarstellungen liefern dieselben Tangenten-Einheitsvektoren.

Definition. Sei eine Kurve K durch $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gegeben.

(i) K heißt **glatt**, wenn $\vec{f}'(t)$ existiert, stetig und überall $\neq 0$ ist (und somit $\vec{T}_f(t)$ existiert).

(ii) K heißt **stückweise glatt**, wenn es eine Partition von $[a,b]$ gibt und K auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ glatt ist.

Für die Frage, welchen Kurven überhaupt eine "Länge" zugeschrieben werden kann, ist der Begriff der Funktion von beschränkter Schwankung von Bedeutung. Darauf soll kurz eingegangen werden.

Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Gibt es eine Konstante $M > 0$, sodass für alle Partitionen $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$ gilt, dass $V_P(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$, dann heißt f von **beschränkter Schwankung** (Variation) auf $[a, b]$.

Schreibweise : $f \in BV[a, b]$.

Ist $f \in BV[a, b]$, dann heißt $V_a^b(f) = \sup_P V_P(f)$ die **Totalvariation** von f auf $[a, b]$.

Es gilt:

1) Jede **monotone** Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auf $[a, b]$ von beschränkter Schwankung.

2) Stetige Funktionen sind i.a. **nicht** von beschränkter Schwankung.

3) Seien $f, g \in BV[a, b]$. Dann sind f, g beschränkt auf $[a, b]$, $f \pm g \in BV[a, b]$ und $fg \in BV[a, b]$.

4) Ist $f \in BV[a, b]$ und $c \in [a, b]$, dann ist auch $f \in BV[a, c]$ und $f \in BV[c, b]$ und es gilt $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

4) Jede Funktion von beschränkter Schwankung läßt sich als Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen darstellen.

Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Wir betrachten wiederum eine Partition $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = b\}$ des Intervalls $[a, b]$, und erhalten die Punkte $P_i = f(t_i)$.

Die Kurve wird nun durch den Polygonzug durch $P_0, P_1, \ldots, P_m$ approximiert. Dieser besitzt die Länge

$$L_P(K) = \sum_{i=1}^{m} \|f(t_{i-1}) - f(t_i)\| = \sum_{i=1}^{m} d(f(t_{i-1}), f(t_i)) \ .$$

Bei Verfeinerung der Zerlegung wächst die Länge des entsprechenden Polygonzuges und damit ist es möglich, dass es keine obere Schranke für die Länge aller Polygonzüge gibt.

Defintion. Sei K eine Jordan-Kurve im $\mathbb{R}^n$ mit der Darstellung $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Existiert eine Konstante M sodass für **alle** Paritionen $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = b\}$ von $[a, b]$ gilt

$L_P(K) = \sum_{i=1}^{m} \|f(t_{i-1}) - f(t_i)\| \leq M$, dann heißt K **rektifizierbar** .

Ist K rektifizierbar, dann heißt $L(K) = \sup_P L_P(K)$ die **Bogenlänge** von K .

Bemerkung. Äquivalente Darstellungen der Kurve liefern denselben Wert für die Bogenlänge.

Satz. Sei K eine Jordan-Kurve im $\mathbb{R}^n$ mit der Darstellung $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Dann gilt

K ist rektifizierbar $\Leftrightarrow$ $f_i \in BV[a, b] \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$

Des weiteren erwähnen wir die beiden folgenden wichtigen Ergebnisse.

Satz. Sei K eine rektifizierbare Jordan-Kurve, dargestellt durch $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Ist $a < c < b$, dann sind auch die Teilkurven, dargestellt durch f auf $[a, c]$ bzw. $[c, b]$ rektifizierbar und es gilt $L_a^b = L_a^c + L_c^b$.

Satz. Sei K eine **glatte** rektifizierbare Jordan-Kurve, dargestellt durch $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Dann gilt : $L(K) = \int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (f_i'(t))^2} dt = \int\limits_a^b \left\| \vec{f}'(t) \right\| dt$

Beispiel. Man bestimme die Bogenlänge der durch

$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \\ \frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix}$ gegebenen Kurve zwischen den durch $t = 0$ und $t = 1$ festgelegten Punkten.

$x(t) = t$, $y(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}$, $z(t) = \frac{1}{2} t^2$ und damit

$\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = \sqrt{2t}$, $\dot{z}(t) = t$.

Folglich ist $L = \int\limits_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 2t + t^2} dt = \int\limits_0^1 (1 + t) dt =$

$= (t + \frac{t^2}{2}) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$

Wir untersuchen nun die sogenannte Krümmung von **ebenen** Kurven. Dabei suchen wir ein Maß für die Abweichung einer Kurve von der Tangente in einem Kurvenpunkt.

Ist die Kurve in expliziter Form $y = y(x)$ gegeben, dann gibt y' die Neigung der Tangente an. y'' gibt die Änderung der Neigung der Tangente in Abhängigkeit von x an (diese Betrachtung führt zur sogenannten "Näherungsparabel").

Wir interessieren uns nun für die Änderung des Steigungswinkels mit der Bogenlänge der Kurve, i.e. $\frac{d\alpha(s)}{ds}$.

$\alpha(s) = \widetilde{\alpha}(x(s))$, $s(x) = \int\limits_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2} dx$

Wir erhalten $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\tilde{\alpha}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\tilde{\alpha}}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}}$ und mit $\widetilde{\alpha} = \arctan y'$ folgt

$\frac{d\widetilde{\alpha}}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}$, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$ und damit

$\frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = k(s)$.

$k(s)$ heißt die **Krümmung** der Kurve im Punkt $(x, y(x))$.

Ist die Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben und lokal $\dot{x}(t) \neq 0$, dann ist $t = t(x)$ und

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ sowie

$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$. Folglich ist

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3\left[1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

Beispiel. Betrachte die Parabel $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.

Dann ist $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$, $\dot{y} = 2t$, $\ddot{y} = 2$ und somit

$k(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$. Für die Krümmung im Scheitel $(t = 0)$ ergibt sich im speziellen $k(0) = 2$.

Nun suchen wir einen Kreis (den sogenannten **Krümmungskreis**), der die Kurve im Punkt $(x, y(x))$ möglichst gut annähert. Dabei sollen für Kreis und Kurve in $(x, y(x))$ sowohl Steigung y' als auch y'' übereinstimmen.

Der gesuchte Kreis habe die Gleichung $(\tilde{x} - \xi)^2 + (\tilde{y} - \eta)^2 = \varrho^2$.

Wir wollen hier lediglich das Endergebnis der Überlegungen anführen, welche $\varrho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, $\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$, $\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$ liefern.

Bemerkung. Ist $\vec{x} = (x(t), y(t))$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\varrho = \frac{1}{|k|} = \frac{(\dot{x}^2+\dot{x}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|} \ , \ \xi(t) = x(t) - \dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}} \ , \ \eta(t) = y(t) + \dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}} \ .$$

Definition. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Krümmungskreise (Krümmungsmittelpunkte) einer Kurve $y(x)$ heißt **Evolute**.

Beispiel. Wir betrachten die Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Eine Parameterdarstellung ist $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$.

Für die Evolute erhalten wir gemäß vorher

$\xi(t) = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \quad , \quad \eta(t) = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$.

Für eine Darstellung in kartesischen Koordinaten setzen wir

$A = \frac{a^2-b^2}{a} \quad , \quad B = \frac{b^2-a^2}{b}$ und erhalten

$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Dabei handelt es sich um eine "gestreckte" bzw. "gestauchte" Astroide.

Sei nun $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eine Raumkurve.

Dann gibt $\dot{\vec{x}}(t)$ die Tangentenrichtung an und $\ddot{\vec{x}}(t)$ gibt die Änderung der Tangentenrichtung an.

Falls $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\ddot{\vec{x}}(t)$ linear unabhängig sind, liefern diese beiden Vektoren zusammen mit dem Punkt $\vec{x}(t)$ eine Ebene.

Betrachten wir den Kurvenpunkt $\vec{x}(t_0)$. Sind die Vektoren $\dot{\vec{x}}(t_0)$ und $\ddot{\vec{x}}(t_0)$ linear unabhängig, wird dadurch die sogenannte **Schmiegebene** im Punkt $\vec{x}(t_0)$ definiert (wobei $\dot{\vec{x}}(t_0)$ bzw. $\ddot{\vec{x}}(t_0)$ zwei Richtungsvektoren der Ebene sind) .

Die Schmiegebene hat also die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{x}(t_0) + \lambda\dot{\vec{x}}(t_0) + \mu\ddot{\vec{x}}(t_0) \ .$$

Im weiteren erweist es sich als sinnvoll, die Bogenlänge als Parameter einzuführen ($\rightarrow$ natürliche Parameterdarstellung).

Betrachte $\vec{x} = \vec{x}(s)$. Mit $s = s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \|\dot{\vec{x}}(\tau)\| d\tau$ folgt

$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(s(t)) = \vec{x}'(s)\dot{s}(t) = \vec{x}'(s)\|\dot{\vec{x}}(t)\|$ und damit ist

$\vec{x}'(s) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}$, folglich $\|\vec{x}'(s)\| = 1$.

Damit : $\vec{x}'(s) = \vec{t}(s)$ ist der Tangenteneinheitsvektor.

Wegen $\vec{x}''(s) = \frac{d}{dt}\vec{x}'(s)\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}\frac{d}{dt}\frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^2}\ddot{\vec{x}}(t) + \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}\dot{\vec{x}}(t)\frac{d}{dt}\frac{1}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}$ liegt auch $\vec{x}''(s)$ in der Schmiegebene.

Aus $0 = \frac{d}{ds}1 = \frac{d}{ds}(\vec{x}'(s) \cdot \vec{x}'(s))$ ergibt sich $\vec{x}'(s) \cdot \vec{x}''(s) = 0$,
und damit $\vec{x}''(s) \perp \vec{x}'(s)$.

Definition.

(i) $\vec{h}(s) = \frac{\vec{x}''(s)}{\|\vec{x}''(s)\|}$ heißt **Hauptnormalenvektor** im Punkt $\vec{x}(s)$.

(ii) $\|\vec{x}''(s)\| = k(s)$ heißt **Krümmung** der Raumkurve im Punkt $\vec{x}(s)$.

(iii) $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{h}(s)$ heißt **Binormalenvektor** im Punkt $\vec{x}(s)$.

(iv) Die Vektoren $\vec{t}(s)$, $\vec{h}(s)$, $\vec{b}(s)$ bilden ein Orthonormalsystem (Einheitsvektoren, die paarweise aufeinander orthogonal stehen), und heißen **begleitendes Dreibein** im Punkt $\vec{x}(s)$.

Bemerkung. Sowohl die Vektoren $\dot{\vec{x}}(t)$, $\ddot{\vec{x}}(t)$ als auch die Vektoren $\vec{x}'(s) = \vec{t}(s)$, $\vec{x}''(s) = k(s)\vec{h}(s)$ spannen die Schmiegebene auf.

Somit ist $\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)$ parallel zu $\vec{b}$. Man kann zeigen, dass $\vec{b}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)\|}$, und weiters

$\vec{h}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t)$ mit $\vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}$.

Wir betrachten nun die Änderungen von $\vec{h}(s)$ mittels des Ansatzes

$\vec{h}'(s) = \lambda\vec{t}(s) + \mu\vec{h}(s) + \nu\vec{b}(s)$.

Wegen $0 = \frac{d}{ds}1 = \frac{d}{ds}(\vec{h} \cdot \vec{h}) = 2\vec{h}' \cdot \vec{h}$ folgt, dass $\mu = 0$.

Wegen $0 = \frac{d}{ds}0 = \frac{d}{ds}(\vec{h} \cdot \vec{t}) = \vec{h}' \cdot \vec{t} + \vec{h} \cdot \vec{t}'$ und $\vec{h}' \cdot \vec{t} = \lambda$ und $\vec{t}' = k\vec{h}$

folgt, dass $\lambda = -k$.

Definition. $\tau(s) = \vec{h}' \cdot \vec{b}$ heißt **Torsion** der Raumkurve. Die Torsion beschreibt die Abweichung der Raumkurve von der Schmiegebene.

Mit dieser Bezeichnungsweise erhalten wir $\vec{h}' = -k\vec{t} + \tau\vec{b}$.

Analog betrachten wir den Ansatz $\vec{b}'(s) = \alpha\vec{t}(s) + \beta\vec{h}(s) + \gamma\vec{b}(s)$.

Wegen $0 = \frac{d}{ds}0 = \frac{d}{ds}(\vec{b}\cdot\vec{t}) = \vec{b}'\cdot\vec{t} + \vec{b}\cdot\vec{t}'$ und $\vec{b}'\cdot\vec{t} = \alpha$ und $\vec{b}\cdot\vec{t}' = \vec{b}\cdot(k\vec{h}) = 0$ folgt, dass $\alpha = 0$.

Wegen $0 = \frac{d}{ds}0 = \frac{d}{ds}(\vec{b}\cdot\vec{h}) = \vec{b}'\cdot\vec{h} + \vec{b}\cdot\vec{h}'$ und $\vec{b}'\cdot\vec{h} = \beta$ und $\vec{b}\cdot\vec{h}' = \tau$ folgt, dass $\beta = -\tau$.

Wegen $0 = \frac{d}{ds}1 = \frac{d}{ds}(\vec{b}\cdot\vec{b}) = 2\vec{b}'\cdot\vec{b}$ folgt, dass $\gamma = 0$.

Insgesamt erhalten wir die **Frenet'schen Formeln**

$$\begin{array}{rcccc} \vec{t}' & = & & k\vec{h} & \\ \vec{h}' & = & -k\vec{t} & & +\tau\vec{b} \\ \vec{b}' & = & & -\tau\vec{h} & \end{array}$$

Für Krümmung und Torsion gilt

(a) in natürlichen Koordinaten $k = \vec{t}'\cdot\vec{h}$, $\tau = -(\vec{b}'\cdot\vec{h}) = \vec{h}'\cdot\vec{b}$

(b) in beliebiger Parameterdarstellung (ohne Beweis)

$$k = \frac{\sqrt{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^2\|\ddot{\vec{x}}(t)\|^2 - (\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}})^2}}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^3} = \frac{\|\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)\|}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^3}$$

$$\tau = \frac{(\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t), \dddot{\vec{x}}(t))}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^2\|\ddot{\vec{x}}(t)\|^2 - (\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}})^2} = \frac{(\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t), \dddot{\vec{x}}(t))}{\|\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)\|^2}$$

Bemerkung. Das begleitende Dreibein einer Raumkurve $\vec{x}(t)$ erhält man also durch :

Bestimme $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\ddot{\vec{x}}(t)$. Dann ist

$\vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}$, $\vec{b}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)\|}$, $\vec{h}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t)$.