

Doppel- und Dreifachintegrale

Sei $[a, b]$ ein Intervall des \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 (also ein Rechteck bzw. ein Quader), i.e.

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \quad \text{oder} \quad [a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] .$$

Für Intervalle des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 (und analog für Intervalle des \mathbb{R}^n) können ebenfalls Partitionen erklärt werden,

$$P[a, b] : \quad a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_l = b_1 \\ a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2 \quad \text{bzw.}$$

$$P[a, b] : \quad a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_l = b_1 \\ a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2 \\ a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = b_3$$

Im Zusammenhang damit erklären wir **Riemannsche Summen** bzgl. einer reellwertigen Funktion f

$$S_P(f; \xi, \eta) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad \text{bzw.}$$

$$S_P(f; \xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

wobei ξ, η, ζ die Wahl von entsprechenden "Zwischenpunkten" ξ_i, η_j, ζ_k bezeichnet.

Definition. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$). Dann heißt f **R-integrierbar** auf $[a, b]$, wenn jede "Zerlegungsnullfolge" $P^{(n)}$ mit $|P^{(n)}| \rightarrow 0$ gegen ein und denselben Wert konvergiert, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{P^{(n)}}(f; \xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = I_2(f) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{P^{(n)}}(f; \xi^{(n)}, \eta^{(n)}, \zeta^{(n)}) = I_3(f)$$

(unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte ξ, η, ζ)

Schreibweise.

$$I_2(f) = \iint_{[a,b]} f(x,y) dx dy = \iint_{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]} f(x,y) dx dy$$

$$I_3(f) = \iiint_{[a,b]} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]} f(x,y,z) dx dy dz$$

Satz. (ohne Beweis)

Falls f "stückweise stetig" auf $[a, b]$ ist, dann ist f R -integrierbar auf $[a, b]$.

Bemerkung. Dabei heißt f stückweise stetig, wenn f stetig in allen Punkten von $[a, b]$ ist mit Ausnahme von Punkten einer Menge C , die als Vereinigung von endlich vielen Kurven (im \mathbb{R}^2) bzw. als Vereinigung von endlich vielen Flächen (im \mathbb{R}^3) darstellbar ist.

Definition. $N \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. $N \subseteq \mathbb{R}^3$) heißt **Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Rechtecke (bzw. Quader) A_n gibt, sodass

$$N \subseteq \bigcup_n A_n \quad \text{und} \quad \sum_n |A_n| < \varepsilon ,$$

wobei $|A_n|$ den üblichen Flächeninhalt eines Rechtecks (bzw. Volumen eines Quaders) bezeichnet.

Satz. (ohne Beweis)

f ist R -integrierbar auf $[a, b] \Leftrightarrow f$ ist stetig auf $[a, b]$ bis auf eine Nullmenge.

Konkrete Berechnung von Doppel- und Dreifachintegralen

$$S_P(f; \xi, \eta) = \sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1}) \sum_{i=1}^l f(\xi_i, \eta_j) (x_i - x_{i-1})$$
$$\sum_{i=1}^l f(\xi_i, y) (x_i - x_{i-1}) = \phi(y) = S_P(f; \xi) \xrightarrow{|P| \rightarrow 0} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx ,$$

wobei y ein Parameter ist. Daraus folgt

$\sum_{j=1}^m \phi(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^m \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, \eta_j) dx \right) (y_j - y_{j-1}) + \text{ein Rest, der mit } |P| \rightarrow 0 \text{ gegen Null strebt.}$

Insgesamt erhalten wir $S_P(f; \xi, \eta) \xrightarrow{|P| \rightarrow 0} \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy .$

Hierfür verwendet man auch die Schreibweise

$$\int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

Bemerkung. Analoges gilt auch für Dreifachintegrale.

Satz. (Fubini)

Sei f auf $[a, b]$ stückweise stetig und beschränkt. Dann existiert

$$\iint_{[a,b]} f(x, y) dx dy = \iint_{[a,b]} f(x, y) dA \quad \text{und es gilt}$$

$$\iint_{[a,b]} f(x, y) dA = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

Bemerkung. Analoges gilt auch für Dreifachintegrale. Unter den Voraussetzungen des Satzes von Fubini ist also die "Reihenfolge der Integration" unwesentlich.

Beispiel. Man bestimme $\iint_B \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dA$, wobei B gegeben ist durch

$B : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 .$

$$\iint_B \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dA = \int_1^2 dy \int_0^1 \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dx = -2 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+y^2}} \Big|_{x=0}^1 dy =$$

$$= -2 \int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} + 2 \int_1^2 \frac{dy}{y} = -2 \operatorname{arsinh} 2 + 2 \operatorname{arsinh} 1 + 2 \ln 2 .$$

Hier wäre $\int_0^1 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y^2)^{3/2}}$ ungünstig gewesen!

Bislang sind wir lediglich in der Lage, über ein Intervall (Rechteck im \mathbb{R}^2 bzw. Quader im \mathbb{R}^3) zu integrieren. Durch Anwendung des Satzes von Fubini werden wir in der Lage sein, auch über allgemeinere Bereiche zu integrieren.

Definition. $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich bzgl. der x -Achse**, wenn es zwei Zahlen a, b und zwei Funktionen $f(x), g(x)$ gibt, sodass B beschrieben werden kann durch

$$B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\} .$$

Analog ist ein Normalbereich bzgl. der y -Achse beschrieben durch

$$B = \{(x, y) : f(y) \leq x \leq g(y), c \leq y \leq d\} .$$

Definition. $B \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Normalbereich bzgl. der xy -Ebene**, wenn es zwei Zahlen a, b , zwei Funktionen $u(x), v(x)$ auf $[a, b]$ sowie zwei Funktionen $f(x, y), g(x, y)$ auf

$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$ gibt, sodass B darstellbar ist durch

$$B = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x), f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\} .$$

Normalbereiche bzgl. der anderen Koordinatenebenen sind analog definiert.

Bemerkung. A stellt die Projektion von B auf die xy -Ebene (bzw. die jeweilige Koordinatenebene) dar.

Ein Normalbereich im engeren Sinne ist ein Normalbereich bzgl. beider Koordinatenachsen (im \mathbb{R}^2) bzw. aller Koordinatenebenen (im \mathbb{R}^3).

Beispiel. (i) Die Fläche des Einheitskreises im \mathbb{R}^2 kann als Normalbereich dargestellt werden, nämlich durch

$$-1 \leq x \leq 1 \quad , \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq +\sqrt{1-x^2}$$

(ii) Die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$, $P_3(1, 3)$ kann als Normalbereich bzgl. der y -Achse dargestellt werden, nämlich durch

$$0 \leq y \leq 3 \quad , \quad \frac{y}{3} \leq x \leq 2 - \frac{y}{3}$$

Frage. Gegeben seien die Punkte $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(1, 3)$. Kann die dadurch definierte Dreiecksfläche als Normalbereich bzgl. der x -Achse bzw. der y -Achse dargestellt werden?

Bemerkung. Für das Integral über einen Normalbereich bzgl. der x -Achse gilt dann

$$\iint_B h(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy .$$

Für das Integral über einen Normalbereich bzgl. der xy -Ebene gilt

$$\iiint_B h(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B h(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} h(x, y, z) dz$$

Die Integrale über die anderen Normalbereiche sind analog definiert.

Beispiel. Sei das Ellipsoid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1$ gegeben.

Die Projektion in die xy -Ebene ist $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$.

Also kann das Ellipsoid beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} -a &\leq x \leq a \\ -b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} &\leq y \leq b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ -c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} &\leq z \leq c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

Bemerkung. Ist ein vorliegender Bereich B kein Normalbereich, so läßt er sich oft in Normalbereiche B_1, B_2, \dots, B_n zerlegen, wobei $B_i \cap B_j$ nur jeweils Randpunkte enthält.

Für das Integral über B gilt dann eine entsprechende Additivitätseigenschaft.

Bemerkung. Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. $B \subseteq \mathbb{R}^3$) ein Normalbereich, dann erhalten wir durch $\iint_B dx dy$ (bzw. $\iiint_B dx dy dz$) den **Flächeninhalt** von B (bzw. das **Volumen** von B).

Dies gilt auch für Bereiche, die sich aus Normalbereichen zusammensetzen lassen.

Eigenschaften von Mehrfachintegralen.

Im folgenden seien f bzw. g stets stückweise stetig, und der Bereich B stückweise glatt.

Mittels Riemannscher Summen kann man die Linearität, Additivität und Positivität nachweisen.

- **(Linearität)**
$$\int \cdots \int_B [\lambda f(x_1, \dots, x_n) + \mu g(x_1, \dots, x_n)] dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \lambda \int \cdots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \mu \int \cdots \int_B g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

- **(Additivität)** Sei B_1, \dots, B_m eine Zerlegung von B , wobei $B_1 \cup \dots \cup B_m = B$ und $B_i \cap B_j$ nur Randkomponenten von B_i bzw. B_j enthält.

$$\int \cdots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\int \cdots \int_{B_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \cdots + \int \cdots \int_{B_m} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

- **(Positivität)** Sei $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ auf B .

Dann gilt $\int \cdots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \geq 0$.

Folgerung. Ist $f \geq g$ auf B , dann ist

$$\int \cdots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \geq \int \cdots \int_B g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

(Beweis: Verwende $h = f - g$)

Weiters gilt die **Betragsungleichung**

$$\left| \int \cdots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right| \leq \int \cdots \int_B |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \cdots dx_n$$

Beweis. Ist $\int \cdots \int_B f dx_1 \cdots dx_n \geq 0$, dann gilt wegen $f \leq |f|$

$$\left| \int \cdots \int_B f dx_1 \cdots dx_n \right| = \int \cdots \int_B f dx_1 \cdots dx_n \leq \int \cdots \int_B |f| dx_1 \cdots dx_n.$$

Ist $\int \cdots \int_B f dx_1 \cdots dx_n \leq 0$, dann gilt wegen $-f \leq |f|$

$$\begin{aligned} \left| \int \cdots \int_B f dx_1 \cdots dx_n \right| &= - \int \cdots \int_B f dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \int \cdots \int_B (-f) dx_1 \cdots dx_n \leq \int \cdots \int_B |f| dx_1 \cdots dx_n. \quad \square \end{aligned}$$

Satz. (Mittelwertsatz)

Sei f stetig auf einem zusammenhängenden kompakten Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann existiert ein Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$, sodass

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \iiint_B f(x, y, z) dV, \text{ wobei}$$

$\text{Vol}(B) = \iiint_B 1 \cdot dV$ das Volumen von B bezeichnet.

Beweis. Weil f stetig auf der kompakten Menge B ist, werden das Maximum und das Minimum angenommen, d.h. $\exists P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ sodass $f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = m$, $\exists P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ sodass $f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = M$ und $m \leq f(x, y, z) \leq M$ auf B .

Damit gilt

$$m \text{Vol}(B) = m \iiint_B 1 \cdot dV \leq \iiint_B f(x, y, z) dV \leq M \iiint_B 1 \cdot dV = M \text{Vol}(B)$$

Folglich $m \leq \mu(f) = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \iiint_B f(x, y, z) dV \leq M$ ($\mu(f)$ heißt auch der Mittelwert von f).

Weil B zusammenhängend ist, gibt es einen Polygonzug, also eine stetige Kurve $C : (x(t), y(t), z(t))$ mit Anfangspunkt P_0 und Endpunkt P_1 , welche ganz in B verläuft.

Betrachte nun die stetige Funktion $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Nach dem Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen Minimum und Maximum von φ angenommen, d.h. $\exists t^* : \varphi(t^*) = \mu(f)$.

Der gesuchte Punkt ist dann $P(\xi, \eta, \zeta) = P(x(t^*), y(t^*), z(t^*))$. \square

Bemerkungen.

(i) Im 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung wurde gezeigt, dass

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi) \quad , \quad a \leq \xi \leq b \quad \text{bzw.}$$

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \text{Vol}(I) = b - a .$$

(ii) Der Mittelwertsatz gilt auch in analoger Weise für den \mathbb{R}^n .