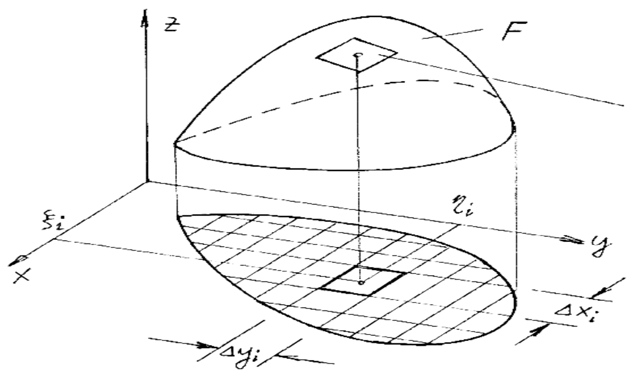
Oberflächenbestimmung

Sei F eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, dargestellt durch $z = f(x,y)$ über B (Projektion von F in die xy-Ebene). Dabei sei $f(x,y)$ stetig differenzierbar auf B.



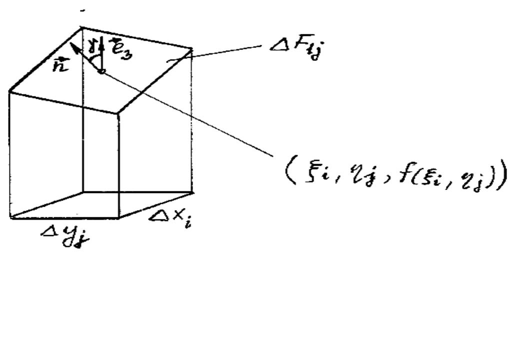
Wir sahen vorher, dass $\iint_B f(x,y)dxdy$ das Volumen des räumlichen Bereichs zwischen der Fläche und der xy-Ebene angibt. Nun interessieren wir uns für den Flächeninhalt des Flächenstücks, i.e. die Oberfläche.

Der "tangentielle Dachziegel" über $\triangle x_i \triangle y_j$ ist das Stück der Tangentialebene in $(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))$ über $\triangle x_i \triangle y_j$.

Dies stellt eine Approximation des Flächeninhalts des Flächenstücks über $\triangle x_i \triangle y_j$ dar.

Eine Näherungsformel für die Oberfläche von F ergibt sich somit durch

$$O(F) = \sum_i \sum_j \text{ Flächeninhalt des } ij\text{-ten "Dachziegels".}$$



Es gilt : $\triangle x_i \triangle y_j = \triangle F_{ij} \cos\gamma$. Ist $\vec{n}$ der **Normaleneinheitsvektor** der Tangentialebene, dann ist $\cos\gamma = (\vec{n}, \vec{e}_3)$.

Die Tangentialebene $z = f(\xi_i, \eta_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_j)(x - \xi_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_j)(y - \eta_j)$ hat als Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \left(\begin{array}{c} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{array} \right) \Bigg|_{(\xi_i, \eta_j)} .$$

Somit ist

$$\sum_i \sum_j \triangle F_{ij} = \sum_i \sum_j \frac{\triangle x_i \triangle y_j}{\cos\gamma} = \sum_i \sum_j \frac{\triangle x_i \triangle y_j}{(\vec{n}, \vec{e}_3)} =$$

$$= \sum_i \sum_j \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_j)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_j)\right]^2} \triangle x_i \triangle y_j \ .$$

Der letzte Ausdruck stellt die Riemannsche Summe $S_P(h; \xi, \eta)$ der - weil f stetig differenzierbar ist - stetigen Funktion $h = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ dar.

Also gilt

$$S_P(h; \xi, \eta) \underset{\left|P^{(n)}\right| \to 0}{\longrightarrow} \iint_B h(x, y) dx dy = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \ dx dy = O(F) \ .$$

Man beachte, dass $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{1}{\cos\gamma}$.

Beispiel. Man bestimme den Flächeninhalt jenes Stücks der Sattelfläche $z = xy$, das innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ liegt.

$f(x, y) = xy$, $B :\ x^2 + y^2 \leq 1$

$$O = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dy$$

Dieses Integral in kartesischen Koordinaten zu behandeln, gestaltet sich relativ kompliziert. Einfacher wird die Verwendung von Polarkoordinaten (siehe später) .

Bemerkung. Selbstverständlich erhalten wir analoge Formeln für die Oberfläche wenn die betrachtete Fläche in der Form $y = f(x, z)$ (bzw. $x = f(y, z)$) vorliegt, und B die Projektion der Fläche in die xz-Ebene (bzw. die yz-Ebene) bezeichnet, nämlich

$$O(F) = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}\; dxdz \qquad \text{bzw.}$$

$$O(F) = \iint_B \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}\; dydz$$

Bemerkung. Liegt eine Fläche F in einer Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad , \quad (u, v) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$$

vor, dann ergeben ähnliche Überlegungen, dass

$$O(F) = \iint_B \|\tfrac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial v}\|\; dudv = \iint_B \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|\; dudv\ .$$

D.h. der Integrand ist die Länge des durch die Parameterdarstellung gelieferten Normalenvektors.

Beispiel. Man berechne den Flächeninhalt von

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} (2 + \cos v) \cos u \\ (2 + \cos v) \sin u \\ \sin v \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le u \le 2\pi \quad , \quad 0 \le v \le 2\pi$$

Wir erhalten

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} -(2 + \cos v) \sin u \\ (2 + \cos v) \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\sin v \cos u \\ -\sin v \sin u \\ \cos v \end{pmatrix}$$

Weitere Rechnung liefert $\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| = 2 + \cos v$.

Folglich ist

$$O(F) = \int\limits_{v=0}^{2\pi} \int\limits_{u=0}^{2\pi} (2 + \cos v) du dv = 2\pi \int\limits_{v=0}^{2\pi} (2 + \cos v) dv = 8\pi^2 \ .$$