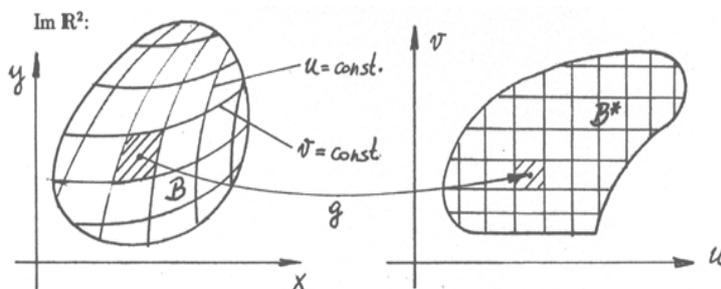


Transformationsformel und Parameterintegrale



Wir betrachten die Koordinatentransformation $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ und die Abbildung $g : B \rightarrow B^*$ sei bijektiv.

Des weiteren sei die Abbildung f stückweise stetig auf B .

Dann gilt

Satz. (Transformationsformel im \mathbb{R}^2) (ohne Beweis)

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_{B^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Dabei ist $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ der **Absolutbetrag der Jacobi-Determinante**.

Bemerkung. $dx dy$ transformiert sich also in $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$.

Plausible Begründung. $\iint_B f(x, y) dx dy$ ist der Limes einer Riemann-Summe über Rechteckszerlegungen in der xy -Ebene.

Jeder solchen Zerlegung entspricht eine Zerlegung in "verzernte" Rechtecke (näherungsweise Parallelogramme) in der uv -Ebene, i.e.

$$S_P(f; \xi, \eta) = \sum \sum f(x(\tilde{u}, \tilde{v}), y(\tilde{u}, \tilde{v})) \times \text{Flächeninhalt des krummlinigen Rechtecks.}$$

Ist $g : x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ stetig differenzierbar, dann ist eine Linearisierung möglich, d.h. die krummlinigen Rechtecke lassen sich durch

Parallelogramme approximieren.

Mit $\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$, $\vec{t}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ erhalten wir für die Fläche des Parallelogramms

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|.$$

Also

$$S_P(f; \xi, \eta) \approx \sum_i \sum_j f(x(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j), y(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u_i \Delta v_j \rightarrow \iint_B f(x, y) dx dy$$

für $|P| \rightarrow 0$.

Im \mathbb{R}^3 erhalten wir analog

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{B^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

Beispiel. $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$ (siehe vorher: Flächeninhalt der Sattelfläche $z = xy$)

Einführung von Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi \Rightarrow$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| = r. \text{ Also}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r \sqrt{1+r^2} dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1+r^2} dr = \\ &= \frac{2\pi}{3} (1+r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} (\sqrt{8} - 1). \end{aligned}$$

$$\text{Beispiel. } I = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r e^{-r^2} dr d\varphi =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R -2r e^{-r^2} dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}) .$$

Speziell ergibt sich für $R \rightarrow \infty$: $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$.

Bemerkung. Betrachten wir das uneigentliche Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy , \text{ dann können wir schreiben}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2 ,$$

$$\text{also } I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

Definition. Eine Funktion $F(x)$ der Form $F(x) = \int_a^b f(x,t) dt$ heißt **Parameterintegral** mit Kern $f(x,t)$.

Satz. Seien $f(x,t)$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ auf $[c,d] \times [a,b]$ stetig.

Dann ist $F(x)$ auf $[c,d]$ differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt . \quad (\text{''Differentiation unter dem Integral''})$$

Beweis. Sei $x_0 \in [c,d]$. Weil f stetig an (x_0,t) ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ sodass $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$.

Mit $\frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta(x-x_0), t)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} &= \int_a^b \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0} dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta(x-x_0), t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt + \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta(x-x_0), t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right] dt . \end{aligned}$$

Mit $x \rightarrow x_0$ folgt dann $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$. \square

Bemerkung. Analoges gilt auch für mehrfache Parameterintegrale

$$F(u_1, \dots, u_m) = \int \dots \int_B f(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \int \dots \int_B \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad , \quad i = 1, \dots, m .$$