Differenziation von Vektoren

Im Zuge der Behandlung der Grundlagen der Vektoranalysis werden wir - wenn nicht anders erwähnt - in erster Linie Vektoren im $\mathbb{R}^3$ betrachten. Zahlreiche Überlegungen und Ergebnisse können allerdings auf einen beliebigen $\mathbb{R}^n$ übertragen werden.

Von besonderer Bedeutung sind dabei Abbildungen

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ , \ \ t \mapsto \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$
- $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \ \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3)$
- $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \ \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} .$

Der erste Fall kann als Definition einer **Raumkurve** interpretiert werden (wobei der Parameter t sehr oft die Zeit darstellt).

Im zweiten Fall spricht von oft von **Skalarfeldern**, d.h. einem Punkt eines räumlichen Bereiches wird eine Zahl (Skalar) zugeordnet.

Im dritten Fall spricht von oft von **Vektorfeldern**, d.h. einem Punkt eines räumlichen Bereiches wird ein Vektor zugeordnet.

Ein Beispiel für ein Skalarfeld wäre etwa die momentane Temperaturverteilung in einem räumlichen Bereich, ein Beispiel für ein Vektorfeld das momentane Geschwindigkeitsfeld der Teilchen einer Strömung.

Verwenden wir die kanonischen Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = (1,0,0) \ , \ \vec{e}_2 = (0,1,0) \ , \ \vec{e}_3 = (0,0,1) \ \text{ im } \ \mathbb{R}^3$$

dann kann eine Raumkurve bzw. ein Vektorfeld auch in der Form

$$\vec{x}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + x_3(t)\vec{e}_3 \qquad \text{bzw.}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = F_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3$$

geschrieben werden.

Die Differenziation von Vektoren kann nun **komponentenweise** definiert werden.

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{x}(t+h)-\vec{x}(t)}{h} = (\frac{d}{dt}x_1(t), \frac{d}{dt}x_2(t), \frac{d}{dt}x_3(t)) =$$

$$= (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)) = \dot{x}_1(t)\vec{e}_1 + \dot{x}_2(t)\vec{e}_2 + \dot{x}_3(t)\vec{e}_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(x_1+h, x_2, x_3) - \vec{F}(x_1, x_2, x_3)}{h} =$$

$$= (\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_3}{\partial x_1}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\vec{e}_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\vec{e}_3$$

Ein klassisches Beispiel in diesem Zusammenhang ist die Bestimmung von Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens.

Beschreibt $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ den Ort eines Teilchens bzgl. der Zeit t , dann ist durch

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$ die Geschwindigkeit, und durch

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))$ die Beschleunigung gegeben.

Wichtige Rechenregeln.

(a) Sei $c(t)$ eine Skalarfunktion und $\vec{A}(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t))$.

Dann ist $c(t)\vec{A}(t) = (c(t)A_1(t), c(t)A_2(t), c(t)A_3(t))$. Weil

$\frac{d}{dt}(c(t)A_i(t)) = \dot{c}(t)A_i(t) + c(t)\dot{A}_i(t)$ gilt offenbar

$$\frac{d}{dt}(c(t)\vec{A}(t)) = \dot{c}(t)\vec{A}(t) + c(t)\dot{\vec{A}}(t) \; .$$

(b) Seien $\vec{A}(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t))$ und $\vec{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))$.

Dann ist $\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t) = A_1(t)B_1(t) + A_2(t)B_2(t) + A_3(t)B_3(t)$ und

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t)) = \dot{A}_1(t)B_1(t) + A_1(t)\dot{B}_1(t) + \dot{A}_2(t)B_2(t) + A_2(t)\dot{B}_2(t) +$$

$$+ \dot{A}_3(t)B_3(t) + A_3(t)\dot{B}_3(t) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \cdot \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{B}(t)}{dt} \; .$$

Also $\frac{d}{dt}(\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t)) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \cdot \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$.

Folgerung. Sei $\vec{A}(t)$ ein Vektor **konstanter** Länge.

Dann ist $\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t) = c \ldots$ const. Damit ist $2\dot{\vec{A}}(t) \cdot \vec{A}(t) = 0$, i.e.

$\dot{\vec{A}}(t) \perp \vec{A}(t)$ ($\dot{\vec{A}}(t)$ und $\vec{A}(t)$ stehen senkrecht aufeinander).

Beispiel. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes mit konstanter Geschwindigkeit $v = |\vec{v}| \neq 0$ auf einer Kreisbahn (wobei der Mittelpunkt im Ursprung liegt).

Wir legen ein Koordinatensystem so, dass die Kreisbahn in der x_1x_2-Ebene liegt, i.e. $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$.

Wegen $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 \ldots$ const. ist $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$.

Wegen $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 \ldots$ const. ist $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$.

Mit $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ folgt, dass $\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \vec{a} = 0$ bzw. $\vec{r} \cdot \vec{a} = -v^2$.

Weil $\vec{r} \perp \vec{v}$ und $\vec{v} \perp \vec{a}$ muß $\vec{r} = \lambda\vec{a}$ sein.

Wegen $-v^2 = \vec{r} \cdot \vec{a} = \lambda a^2$ gilt $\lambda < 0$.

Aus $\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{r}||\vec{a}| \cos\alpha$ folgt $\lambda a^2 = |\lambda| a^2 \cos\alpha$, und damit ist $\cos\alpha = -1$, i.e. $\alpha = \pi$.

Wegen $|\vec{r}||\vec{a}| = v^2$ gilt schließlich $a = \frac{v^2}{r}$.