Linien- und Oberflächenintegrale

Bei den früheren eindimensionalen Integralen wurde in der Regel entlang eines Intervalls einer Koordinatenachse integriert.

Bei einem **Linienintegral** wird der Integrationsweg nun entlang einer Kurve durchlaufen. Dabei gibt es mehrere Formen.

Sei C eine Kurve (bzw. ein Kurvenstück), s die Bogenlänge,

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ eine Skalarfunktion (i.e. ein Skalarfeld) und

$\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ eine Vektorfunktion (i.e. ein Vektorfeld).

Ist $\vec{x}$ ein Ortsvektor, dann bezeichnet $d\vec{x}$ den Vektor $d\vec{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ (die Komponenten sind also die Differenziale der Komponenten des Ortsvektors).

Ist $\vec{x}(t)$ eine Parametrisierung der Kurve C , dann ist offenbar

$d\vec{x} = (\dot{x}_1 dt, \dot{x}_2 dt, \dot{x}_3 dt) = \dot{\vec{x}}(t) dt$ und

$ds = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, dt$. Die Größe ds heißt **Linienelement**.

Folgende Formen von Linienintegralen können nun auftreten.

$$\int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, dt \in \mathbb{R}$$

$$\int_C \vec{F}(x_1, x_2, x_3) ds = \begin{pmatrix} \int_C F_1(x_1, x_2, x_3) ds \\ \int_C F_2(x_1, x_2, x_3) ds \\ \int_C F_3(x_1, x_2, x_3) ds \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) d\vec{x} = \begin{pmatrix} \int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) dx_1 \\ \int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) dx_2 \\ \int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) dx_3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\int_C \Phi(x_1,x_2,x_3)dx_i = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x_1(t),x_2(t),x_3(t))\dot{x}_i(t)dt$$

$$\begin{aligned}
&\int_C \vec{F}(x_1,x_2,x_3)\cdot d\vec{x} = \\
&= \int_C F_1(x_1,x_2,x_3)dx_1 + \int_C F_2(x_1,x_2,x_3)dx_2 + \int_C F_3(x_1,x_2,x_3)dx_3 = \\
&= \int_C F_1(x_1,x_2,x_3)\dot{x}_1 dt + \int_C F_2(x_1,x_2,x_3)\dot{x}_2 dt + \int_C F_3(x_1,x_2,x_3)\dot{x}_3 dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{x}(t))\cdot\dot{\vec{x}}(t)dt
\end{aligned}$$

Bemerkungen.

1) Die Berechnung der Bogenlänge eines Kurvenstücks C ist selbst ein Kurvenintegral

$$L = \int_C \Phi(x_1,x_2,x_3)ds \quad \text{mit} \quad \Phi(x_1,x_2,x_3) \equiv 1$$

2) Man beachte, dass beim Kurvenintegral

$$\int_C \vec{F}(x_1,x_2,x_3)\cdot d\vec{x} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{x}(t))\cdot\dot{\vec{x}}(t)dt$$

der Integrand durch den Anteil von $\vec{F}(x_1,x_2,x_3)$ in Richtung des Tangenteneinheitsvektors gegeben ist.

3) Das bekannteste Beispiel aus der Physik für ein Linienintegral ist die geleistete Arbeit einer Kraft entlang eines Weges. Dieses ist durch

$$W = \int_C \vec{F}(x_1,x_2,x_3)\cdot d\vec{x} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{x}(t))\cdot\dot{\vec{x}}(t)dt$$

gegeben.

Beispiel. Man bestimme die Arbeit bei der Wirkung der Kraft

$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2 x_2, x_2^2, 0)$ entlang der Parabel

$x_2 = x_1^2$, $x_3 = 0$, $0 \le x_1 \le 1$. (Beachte, dass auch $0 \le x_2 \le 1$)

$F_1(x_1,x_2,x_3)dx_1 = x_1^2 x_2 dx_1 = x_1^4 dx_1 \quad , \quad F_2(x_1,x_2,x_3)dx_2 = x_2^2 dx_2$

$W = \int\limits_0^1 x_1^4 dx_1 + \int\limits_0^1 x_2^2 dx_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

Der vorliegende Weg kann auch durch $\vec{x}(t) = (t, t^2, 0)$, $0 \leq t \leq 1$ beschrieben werden.

Dann ist $\dot{\vec{x}}(t) = (1, 2t, 0)$ und $\vec{F}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (t^4, t^4, 0)$.

$\vec{F}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = t^4 + 2t^5$

Somit ist $W = \int\limits_0^1 \left(t^4 + 2t^5\right) dt = \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}$.

Beispiel. Man bestimme $\int_C \Phi(x_1,x_2,x_3)ds$, wobei die Kurve C durch $t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$ gegeben ist und $\Phi(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2$ ist.

$\dot{x}_1 = -\sin t$, $\dot{x}_2 = \cos t$, $\dot{x}_3 = 0$, also $\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} = 1$

Damit ist $\int_C \Phi(x_1,x_2,x_3)ds = \int\limits_0^\pi (\cos t + \sin t)dt =$

$= (\sin t - \cos t)\,\big|_0^\pi = 2$.

Analog zum Begriff des Kurven- bzw. Linienintegrals kann nun auch ein **Oberflächenintegral** definiert werden, bei dem jeder Punkt auf der Oberfläche durch eine Funktion "gewichtet" wird.

Für eine Fläche O mit Parameterdarstellung $\vec{x}(u,v)$ und eine Skalarfunktion $\Phi(x_1,x_2,x_3)$ führt dies zu

$$\iint\limits_O \Phi(x_1,x_2,x_3)dA = \iint\limits_B \Phi(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))\, |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\, du dv$$

Hier ist also (formal) das **Flächenelement** $dA = |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| du dv$.

Beispiel. Wir betrachten die Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius

R und Mittelpunkt im Ursprung, und integrieren darauf die Funktion $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$.

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten erhalten wir eine Parameterdarstellung

$\vec{x}(\varphi, \vartheta) = (R \sin\vartheta \cos\varphi, R \sin\vartheta \sin\varphi, R\cos\vartheta)$ der Kugeloberfläche,

wobei $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $0 \le \vartheta \le \pi$.

Des weiteren ist $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 = R^2 \sin^2\vartheta$ und

$|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta| = R^2 \sin\vartheta$.

Folglich ist $\iint\limits_O \Phi(x_1, x_2, x_3) dA = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} R^2 \sin^2\vartheta R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi =$

$= R^4 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi R^4 \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta =$

$= 2\pi R^4 \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{4}(3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta) d\vartheta = \frac{\pi R^4}{2} \left[-3\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos 3\vartheta\right]\Big|_0^\pi =$

$= \frac{\pi R^4}{2}[3 - \frac{1}{3} - (-3 + \frac{1}{3})] = \frac{8\pi R^4}{3}$.

Neben Skalarfunktionen kann man auch vektorwertige Funktionen (Vektorfelder) über Flächen integrieren. Häufig ist es dabei notwendig, die Richtung der Flächennormalen zu berücksichtigen.

Dies tritt etwa bei einem Integral der Form $\iint\limits_O \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot \vec{n} dA$ auf.

Der Vektor $\vec{n}$ ist dabei der **Einheitsnormalenvektor** der Fläche. Bei einer Parametrisierung der Fläche mittels $\vec{x}(u, v)$ ist dann

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} .$$

Den Ausdruck $\vec{n} dA \equiv d\vec{A}$ bezeichnet man auch als **vektorielles Flächenelement** und ist (bei gegebener Parametrisierung) offenbar

$$d\vec{A} = \vec{n} dA = (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) du dv ,$$

wodurch obiges Integral in der Form $\iint\limits_O \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{A}$ geschrieben werden kann. Es liefert als Ergebnis eine skalare Größe.

Bemerkung. Das Integral $\iint\limits_O \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot \vec{n} dA$ beschreibt etwa den sogenannten "Fluß" ("Anzahl der Feldlinien") des Kraftfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche.

Die Richtung der Flächennormalen ist nicht eindeutig festgelegt und hängt von der Parametrisierung ab. In der Regel bezeichnet man den Vektor, der von einem konvexen Flächenteil (etwa einer Kugeloberfläche) weg zeigt, als "nach außen gerichtet". Bei einer gegebenen Parametrisierung ist daher jeweils zu überprüfen, ob der Normalenvektor "nach außen" weist.

Weitere Formen von Oberflächenintegralen sind

$$\iint\limits_O d\vec{A} \times \vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \iint\limits_B (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \times \vec{F}(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) du dv$$

$$\iint\limits_O \Phi(x_1, x_2, x_3) d\vec{A} = \iint\limits_B \Phi(x_1, (u,v) x_2(u,v), x_3(u,v))(\vec{x}_u \times \vec{x}_v) du dv$$

welche als Ergebnis Vektoren haben.

Beispiel. Betrachte das letzte Integral mit $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ bezüglich eines Zylindermantelteils welcher durch

$\vec{x}(\varphi, x_3) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, x_3)$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le x_3 \le 5$ parametrisiert ist.

Dann ist $\vec{x}_\varphi = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0)$, $\vec{x}_{x_3} = (0,0,1)$.

$d\vec{A} = (\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_{x_3}) d\varphi dx_3 = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) d\varphi dx_3$ und

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

Wir erhalten

$$\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{x_3=0}^{5} R^2 \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dx_3 = 10R^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Bemerkung. Ist eine Fläche in der Form $x_3 = f(x_1, x_2)$ gegeben und werden x_1 und x_2 als Parameter gewählt, erhalten wir

$\vec{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ sowie

$$\vec{x}_{x_1} \times \vec{x}_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_{x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{x_1} \\ -f_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist $\vec{n} = \frac{(-f_{x_1}, -f_{x_2}, 1)}{\sqrt{1+f_{x_1}^2+f_{x_2}^2}}$ und $dA = \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}dx_1dx_2 = \frac{dx_1dx_2}{|\vec{e}_3 \cdot \vec{n}|}$

Analoge Darstellungen erhält man für die Fälle $x_1 = f(x_2, x_3)$ bzw. $x_2 = f(x_1, x_3)$.

Beispiel. (Oberfläche von Drehkörpern)

Wir betrachten ein Kurvenstück $x_3 = f(x_1)$, $a \le x_1 \le b$ in der x_1x_3-Ebene.

Die Fläche, die bei Rotation dieser Kurve um die x_1-Achse entsteht, kann mittels $\vec{x}(x_1, \varphi) = (x_1, f(x_1)\sin\varphi, f(x_1)\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ parametrisiert werden.

Dann ist $dA = |\vec{x}_{x_1} \times \vec{x}_\varphi| dx_1 d\varphi = f(x_1)\sqrt{1 + [f'(x_1)]^2}dx_1d\varphi$.

Als Oberfläche erhalten wir $2\pi \int\limits_a^b f(x_1)\sqrt{1 + [f'(x_1)]^2}dx_1$.