Skalarfelder, Niveauflächen, Gradient

Eine Skalarfunktion (bzw. ein Skalarfeld) $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ordnet einem Punkt des $\mathbb{R}^3$ einen Zahlenwert zu. Bekannte Beispiele aus der Physik wären etwa die Temperatur- oder Massendichteverteilung in einem räumlichen Bereich.

Für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ wird durch die Gleichung $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \lambda$ bzw. $\Phi(x_1, x_2, x_3) - \lambda = 0$ eine Fläche beschrieben (auf der Φ den konstanten Wert λ hat). Eine solche Fläche heißt auch **Niveaufläche** des Skalarfeldes.

Beispiel. Die Niveauflächen des elektrostatischen Potenzials einer Punktladung (a ist dabei die Ladung in geeigneten Einheiten) sind Kugelflächen, da $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{a}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$ ist und folglich

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \lambda \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{a^2}{\lambda^2}$$

Ein Mittel, um Änderungen eines Skalarfeldes $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ geeignet zu beschreiben, ist die **Richtungsableitung**, welche bereits früher diskutiert wurde.

Ist $\vec{a}$ ein Einheitsvektor, dann ist die Richtungsableitung von Φ in Richtung $\vec{a}$ in einem Punkt $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ gegeben durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{a}}(x^0) = (\text{grad } \Phi(x^0)) \cdot \vec{a} \ .$$

Wir zeigten außerdem, dass $\text{grad } \Phi(x^0)$ jene Richtung angibt, in der die Änderung von Φ maximal ist.

Ist nun $\vec{x}(u, v)$ eine Parameterdarstellung von $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \lambda$, dann liefert partielle Ableitung nach u bzw. v

$$\Phi_{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \Phi_{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \Phi_{x_3} \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \text{grad}\Phi \cdot \vec{x}_u = 0$$

$$\Phi_{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \Phi_{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \Phi_{x_3} \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \text{grad}\Phi \cdot \vec{x}_v = 0$$

Dies bedeutet aber, dass grad $\Phi(x^0)$ ein **Normalenvektor** auf die Niveaufläche im Punkt x^0 ist.

Wir betrachten nun den Differentialoperator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} ,$$

der sowohl auf Skalarfunktionen als auch auf Vektorfunktionen (siehe später) "wirken" kann. Dieser Operator heißt auch **Nabla**-Operator und er spielt eine zentrale Rolle in der Vektoranalysis.

Im Falle einer Skalarfunktion $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ergibt sich

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} .$$

Dies ist aber nichts anderes als der Gradient von Φ !

Bemerkung. Das totale Differential einer Funktion $\Phi(x_1, x_2, x_3)$,

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}dx_3$$

kann ebenfalls mittels des Gradienten in der Form

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{r}$$

geschrieben werden, wobei $d\vec{r} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ ist.

Definition. Ein Vektorfeld $\vec{F}$ heißt ein **Gradientenfeld** wenn eine Skalarfunktion Φ existiert, sodass

$$\vec{F} = \text{grad } \Phi = \nabla\Phi \ .$$

Im Falle einer Kraft $\vec{F}$ nennt man diese dann eine **konservative Kraft**.

Ist nun $\vec{F}$ eine konservative Kraft (i.e. $\vec{F} = \text{grad } \Phi$), dann berechnet sich die geleistete Arbeit entlang eines Weges C von P nach Q durch

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \tfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \tfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \tfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} dx_3 = d\Phi \ ,$$

also $W = \Phi(Q) - \Phi(P)$.

Dies bedeutet aber, dass der Wert des Linienintegrals nur von den Werten von Φ an den jeweiligen Endpunkten abhängt, nicht aber von der verbindenden Kurve selbst. Ein derartiges Linienintegral heißt auch **wegunabhängig**.

Im besonderen ergibt sich im Falle einer geschlossenen Kurve, dass der Wert des Linienintegrals gleich Null ist !!

Beispiel. Die Kraft $\vec{F} = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2^2, 0)$ ist eine konservative Kraft, weil $\vec{F} = \text{grad}\ \Phi$ ist mit $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3$.

Wie können wir in diesem Beispiel die Funktion Φ bestimmen ?

Wir nehmen an, dass $\vec{F} = \text{grad}\ \Phi$ ist. Dann ist $\Phi_{x_1} = F_1 = 2x_1 + x_2$.

Integration nach x_1 liefert $\Phi = x_1^2 + x_1 x_2 + \varphi(x_2, x_3)$, wobei $\varphi(x_2, x_3)$ eine willkürliche Funktion von x_2 und x_3 bezeichnet.

Nun muss auch $\Phi_{x_2} = F_2 = x_1 - x_2^2$ gelten. Wir erhalten

$x_1 + \varphi_{x_2} = x_1 - x_2^2$, also $\varphi_{x_2} = -x_2^2$ (man beachte, dass x_1 hier nicht mehr vorkommt ! Daher können wir weiterrechnen.)

Integration nach x_2 liefert jetzt $\varphi(x_2, x_3) = -\frac{1}{3} x_2^3 + \psi(x_3)$, wobei $\psi(x_3)$ eine willkürliche Funktion von x_3 bezeichnet. Damit ist

$\Phi = x_1^2 + x_1 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3 + \psi(x_3)$.

Die Bedingung $\Phi_{x_3} = F_3 = 0$ liefert $\psi' = 0$, also $\psi = C$, z.B. $\psi = 0$.

Damit ist $\Phi = x_1^2 + x_1 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3$ eine gesuchte Funktion.

Bemerkung. Alle Funktionen Φ mit $\vec{F} = \text{grad}\ \Phi$ sind durch

$\Phi = x_1^2 + x_1 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3 + C \quad , \ C \in \mathbb{R}$ gegeben.