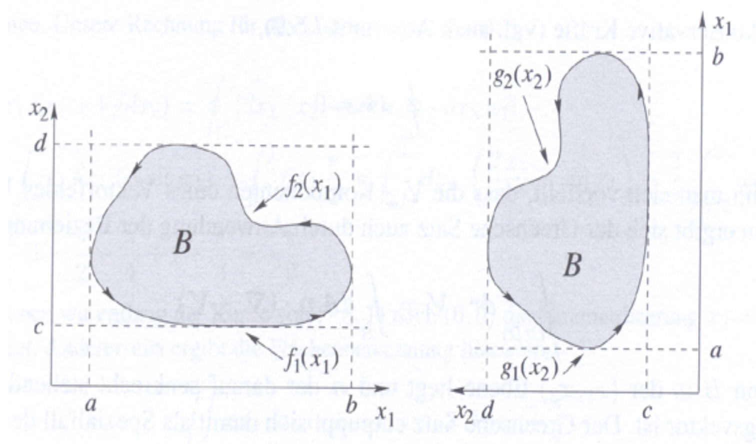
Der Greensche Satz in der Ebene

Wir betrachten nun einen ebenen Bereich B, dessen Randkurve $C = \partial B$ geschlossen und stückweise glatt ist. Wir nehmen vorerst an, dass B ein Normalbereich bzgl. der x_1-Achse ist.

$B \;:\; a \le x_1 \le b\ ,\ f_1(x_1) \le x_2 \le f_2(x_1)$



(Kompliziertere Bereiche kann man sich aus Normalbereichen zusammengesetzten Bereichen vorstellen)

Auf C und im Bereich B seien stetig partiell differenzierbare Funktionen $V_1(x_1, x_2)$, $V_2(x_1, x_2)$ erklärt.

Zuerst halten wir fest, dass für eine in B stetig differenzierbare Funktion $V(x_1, x_2)$ gilt

$$\iint\limits_B \frac{\partial V}{\partial x_2}\, dx_2 dx_1 = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{f_1(x_1)}^{f_2(x_1)} \frac{\partial V}{\partial x_2}\, dx_2\Big]\, dx_1 = \int\limits_a^b \Big[V \,\Big|_{f_1(x_1)}^{f_2(x_1)}\Big]\, dx_1 =$$

$$= \int\limits_a^b [V(x_1, f_2(x_1)) - V(x_1, f_1(x_1))] dx_1 =$$

$$= \int\limits_a^b V(x_1, f_2(x_1)) dx_1 - \int\limits_a^b V(x_1, f_1(x_1)) dx_1 =$$

$$= - \int\limits_a^b V(x_1, f_1(x_1)) dx_1 - \int\limits_b^a V(x_1, f_2(x_1)) dx_1 = - \oint_C V(x_1, x_2) dx_1$$

Man kann also das Flächenintegral in ein Kurvenintegral umschreiben.

Ist B darüberhinaus auch ein Normalbereich bzgl. der x_2-Achse, dann kann man analog zeigen, dass

$$\iint\limits_B \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \oint_C V(x_1, x_2) dx_2 \ .$$

Übertragen auf das Funktionenpaar $V_1(x_1, x_2)$, $V_2(x_1, x_2)$ ergibt sich

Satz. (**Satz von Green** in der Ebene)

$$\iint\limits_B \left[\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 = \oint_C \left[V_1(x_1, x_2) dx_1 + V_2(x_1, x_2) dx_2\right]$$

Bemerkungen.

• Gilt $V_i(x_1, x_2) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ für eine zweimal stetig differenzierbare Skalarfunktion $\Phi(x_1, x_2)$, dann kann die rechte Seite als Arbeitsintegral einer konservativen Kraft interpretiert werden, und die linke Seite ist (erwartungsgemäß) gleich Null.

• Der Greensche Satz kann auch zur Flächenberechnung herangezogen werden.

Setzt man $V_1(x_1, x_2) = -x_2$ und $V_2(x_1, x_2) = x_1$, dann ergibt sich

$$\oint_C \left[-x_2 dx_1 + x_1 dx_2\right] = \iint\limits_B \left[\frac{\partial x_1}{\partial x_1} - \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 = 2 \iint\limits_B dx_1 dx_2 = 2A_B$$

also die doppelte Fläche A_B des Bereiches B .

Beispiel.

Die Ellipse $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad , \ 0 \leq t \leq 2\pi \ .$$

Daraus folgt $dx_1 = -a \sin t dt$ und $dx_2 = b \cos t dt$. Folglich ist

$$A = \frac{1}{2} \oint_C \left[-x_2 dx_1 + x_1 dx_2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [(-b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(b\cos t)]dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = ab\pi \ .$$

Beispiel.

Manchmal ist die Berechnung des Flächenintegrals einfacher als die des entsprechenden Linienintegrals.

Die Kurve C habe Dreiecksform, sie verläuft zuerst entlang der Geraden von $(0,0)$ bis $(\pi/2,0)$, danach entlang der Geraden von $(\pi/2,0)$ bis $(\pi/2,1)$ und dann von dort zurück nach $(0,0)$.

Seien $V_1(x_1,x_2) = x_2 - \sin x_1$, $V_2(x_1,x_2) = -x_1$. Dann ist

$$\oint_C (V_1 dx_1 + V_2 dx_2) = \oint_C [(x_2 - \sin x_1)dx_1 - x_1 dx_2] =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} (-\sin x_1)dx_1 - \int\limits_0^1 \frac{\pi}{2}dx_2 + \int\limits_{\pi/2}^0 \left(\frac{2x_1}{\pi} - \sin x_1\right) dx_1 - \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^0 x_1 dx_1 =$$

$$= -1 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

(Dabei wurde entlang der Kurve von $(\pi/2,1)$ nach $(0,0)$ die Parametrisierung $x_2 = \frac{2x_1}{\pi}$ verwendet.)

Die Flächenberechnung liefert sofort

$$\iint\limits_B (-1-1)dx_2 dx_1 = -2A_B = -\frac{\pi}{2} \text{ , also } A_B = \frac{\pi}{4} \ .$$