Definition eines Tensors, Rechenregeln

Tensoren sind Größen, mit deren Hilfe man Skalare, Vektoren sowie weitere Größen analoger Struktur in ein einheitliches Schema einordnen kann, um mathematische und physikalische Zusammenhänge zu beschreiben.

Tensoren sind dabei durch ihre Transformationseigenschaften gegenüber orthogonalen Transformationen (Drehungen und Drehspiegelungen) definiert. Im Hintergrund steht dabei die allgemeinere Frage : was ändert sich und was ändert sich nicht, wenn das Bezugssystem sich ändert (wenn also beispielsweise das Bezugssystem gedreht wird) ?

Wir betrachten nun eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Einem Vektor $\mathbf{a}$ mit Komponenten a_1, a_2, a_3 wird dabei ein Vektor $\mathbf{b}$ zugeordnet.

$$\mathbf{b} = T\mathbf{a} \quad bzw. \quad \begin{aligned} b_1 &= t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + t_{13}a_3 \\ b_2 &= t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + t_{23}a_3 \\ b_1 &= t_{31}a_1 + t_{32}a_2 + t_{33}a_3 \end{aligned}$$

Verwenden wir die **Einsteinsche Summenkonvention** (über doppelt vorkommende Indizes wird stets summiert), so können wir schreiben

$$b_i = t_{ij}a_j \qquad \text{(dies bedeutet also } b_i = \sum_{j=1}^{3} t_{ij}a_j\text{)}$$

Wir unterwerfen nun die beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ einer orthogonalen Transformation, die durch die Matrix $\mathbf{R} = (r_{ij})$ vermittelt wird. Dann gilt bekanntlich

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = E \ \text{(... Einheitsmatrix)} \ , \ \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \ , \ r_{ij}r_{il} = \delta_{jl}$$

Nun ist $\mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a}$ bzw. $a'_l = r_{lj}a_j$, $\mathbf{b}' = \mathbf{R}\mathbf{b}$ bzw. $b'_k = r_{ki}b_i$, und

$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}'$ bzw. $a_j = r_{lj}a'_l$, $\mathbf{b} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}'$ bzw. $b_i = r_{ki}b'_k$.

Schreiben wir den Zusammenhang von $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}'$ in der Form $b'_k = t'_{kl}a'_l$ dann ist

$$t'_{kl}a'_l = b'_k = r_{ki}b_i = r_{ki}t_{ij}a_j = r_{ki}t_{ij}r_{lj}a'_l$$

Damit haben wir die Transformationseigenschaften von T gewonnen, nämlich

$$t'_{kl} = r_{ki}r_{lj}t_{ij}$$

Bemerkung. Man beachte, dass auch $b'_k a'_l = r_{ki}r_{lj}b_i a_j$. Sowohl t_{ij} als auch $b_i a_j$ transformieren sich also gleich.

Die vorige Gleichung $t'_{kl} = r_{ki}r_{lj}t_{ij}$ definiert das Transformationsverhalten eines **Tensors zweiter Stufe**. Diese Form der Definition kann nun beliebig verallgemeinert werden.

Die Größe S stelle eine Menge von Termen mit drei Indizes dar: s_{ijk}, die das Transformationsverhalten $s'_{ijk} = r_{ir}r_{js}r_{kt}s_{rst}$ haben. Dann stellt S einen Tensor 3. Stufe dar.

Allgemein entsprechen Tensoren n-ter Stufe einer Menge von Termen mit n Indizes und analogem Transformationsverhalten (ein Faktor r_{ij} pro Index).

Bislang können wir festhalten :

- Tensoren nullter Stufe sind Skalare
- Tensoren erster Stufe sind Vektoren
- Tensoren zweiter Stufe sind Matrizen .

Bemerkung. Mathematisch gesehen, ist ein Tensor n-ter Stufe ein Element eines direkten Produkts von n Vektorräumen (siehe Lineare Algebra). Der Tensor "erbt" dabei alle Transformationseigenschaften der beteiligten Vektoren. Hier haben wir es vorwiegend mit Vektoren des $\mathbb{R}^3$ zu tun und die Transformationen sind orthogonale Transformationen.

Im $\mathbb{R}^3$ hat ein Tensor 0.ter Stufe eine Komponente, ein Tensor 1. Stufe 3 Komponenten, ein Tensor 2. Stufe $3^2 = 9$ Komponenten, und ein Tensor n-ter Stufe 3^n Komponenten.

Durch die Möglichkeit der paarweisen Vertauschung von Indizes ergeben sich **Symmetrieeigenschaften** von Tensoren.

Gilt etwa für einen Tensor 2. Stufe $t_{ik} = t_{ki}$, dann heißt er **symmetrisch**. Im Falle von $t_{ik} = -t_{ki}$ heißt er **schiefsymmetrisch** (bzw. auch **antisymmetrisch**).

Ein allgemeiner Tensor ist etwa symmetrisch in den ersten beiden Indizes, wenn $t_{ijk\ldots l} = t_{jik\ldots l}$ und schiefsymmetrisch in den ersten beiden Indizes, wenn $t_{ijk\ldots l} = -t_{jik\ldots l}$.

Einen Tensor zweiter Stufe (und in analoger Weise einen Tensor n-ter Stufe) kann man in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil zerlegen, nämlich

$$t_{ij} = \tfrac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) + \tfrac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji})$$

Beispiele.

• Die Kronecker-Deltafunktion δ_{ij} definiert einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe in jedem $\mathbb{R}^n$, $n > 0$ mit der Transformationseigenschaft

$$\delta'_{ij} = r_{is} r_{jt} \delta_{st} = r_{is} r_{js} = \delta_{ij}$$

• Im $\mathbb{R}^2$ ist der Tensor 2. Stufe mit $\sigma_{12} = -\sigma_{21} = 1$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ schiefsymmetrisch, entsprechend der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Im $\mathbb{R}^3$ ist der Tensor 2. Stufe mit $a_{12} = a_{13} = 1$, $a_{23} = -2$, $a_{21} = a_{31} = -1$, $a_{32} = 2$, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ schiefsymmetrisch, entsprechend der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Rechenregeln für Tensoren.

• Tensoren gleicher Stufe können **addiert** oder **subtrahiert** werden.

$$c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$$

- Das **direkte Produkt** zweier Tensoren führt stets (außer bei Tensoren nullter Stufe) zu einem Tensor höherer Ordnung. Die Stufe des Produkttensors ist dabei durch die Summe der Stufen der beteiligten Tensoren gegeben.

  Beispiel: $r_{iklm} = a_{ik} \otimes b_{lm} = a_{ik} b_{lm}$

- Ein Tensor (höherer Stufe) kann einer **Verjüngung** unterworfen werden. Dabei summiert man über zwei der Indizes. Nach der Summenkonvention wird das durch das Gleichsetzen zweier Indizes ausgedrückt. Als Ergebnis erhält man einen Tensor mit einer um zwei niedrigeren Stufe.

  $$r_{iklm} \hookrightarrow r_{iilm} = \sum_i r_{iilm} = s_{lm}$$

- Bei der **Überschiebung** von zwei Tensoren bildet man zuerst das Tensorprodukt und führt danach eine Verjüngung aus.

Beispiel: Gegeben t_{ij} , a_k .

$$t_{ij} \otimes a_k = t_{ij} a_k \rightarrow t_{ij} a_j = b_i$$

(Multiplikation einer Matrix und eines Vektors)

Beispiel: Gegeben a_i , b_j

$$a_i \otimes b_j = a_i b_j \rightarrow a_i b_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

(Skalarprodukt von zwei Vektoren)

- Die **Spur** eines Tensors zweiter Stufe ist wie die Spur einer Matrix definiert, nämlich als Verjüngung, und ist ein Skalar.

  $$\mathrm{Sp}(t_{ik}) = \mathrm{tr}(t_{ik}) = t_{ii}$$

- Gewisse Eigenschaften von Tensoren bleiben bei orthogonalen Transformationen erhalten. Ein Tensor 0. Stufe (ein Skalar) ist natürlich invariant gegenüber solchen Transformationen. Für Vektoren als Tensoren 1. Stufe ist das Skalarprodukt invariant.

Bei Tensoren 2. Stufe sind die Spur und die Determinante invariant.