

# Der $\epsilon$ -Tensor

Der  $\epsilon$ -Tensor im  $\mathbb{R}^n$  ist ein Tensor mit den Werten  $-1, 0, +1$ , der antisymmetrisch bei paarweiser Vertauschung von zwei Indizes ist (also das Vorzeichen ändert).

Im  $\mathbb{R}^3$  besitzt er die Darstellung

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i, j, k) \text{ ist gerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & (i, j, k) \text{ ist ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst, i.e. zwei Indizes sind gleich} \end{cases}$$

(Dabei heißt eine Permutation  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  von  $n$  Elementen **gerade** (bzw. **ungerade**), wenn sie durch eine gerade (bzw. ungerade) Anzahl von paarweisen Indexvertauschungen in die natürliche Permutation  $(1, 2, \dots, n)$  übergeführt werden kann)

Da es  $3! = 6$  Permutationen von 3 Elementen gibt, hat der  $\epsilon$ -Tensor im  $\mathbb{R}^3$  sechs nichtverschwindende Elemente

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1, \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$$

Wie man durch leicht verifiziert, kann man den  $\epsilon$ -Tensor auch als Determinante schreiben

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe des  $\epsilon$ -Tensors können verschiedene Vektoroperationen, wie etwa das Vektorprodukt oder die Rotation, dargestellt werden.

Das Vektorprodukt  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  von zwei Vektoren  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  und  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  ist bekanntlich

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2$$

$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{231} a_3 b_1$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1$$

Zusammengefasst kann dies als

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{Summenkonvention !}) \text{ geschrieben werden.}$$

(Man sieht auch, dass diese Größe durch zweifache Verjüngung des Tensors 5. Stufe  $\epsilon_{ijk} a_n b_m$  entsteht.)

Der Rotor kann analog gebildet werden.

$$\mathbf{c} = \text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} \quad \text{entspricht} \quad c_i = \epsilon_{ijk} \partial_j a_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j},$$

wobei die Schreibweise  $\partial_j a_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$  verwendet wurde.

Betrachten wir nun den Ausdruck  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (d_1, d_2, d_3)$ . Dann ist

$$d_i = \epsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \epsilon_{ijk} a_j (\epsilon_{klm} b_l c_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m.$$

Der Ausdruck  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}$  entsteht durch Verjüngung des direkten Produktes zweier  $\epsilon$ -Tensoren.

Wir schreiben zuerst das Produkt von zwei  $\epsilon$ -Tensoren mit Hilfe der Determinantendarstellung an.

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{vmatrix}$$

In der ersten Determinante vertauschen wir Zeilen und Spalten (Wert der Determinante ändert sich dabei nicht) und verwenden weiters den Determinantenproduktsatz  $\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \mathbf{B}$ .

$$\begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Dabei verwendeten wir, dass  $\delta_{1i} \delta_{1l} + \delta_{2i} \delta_{2l} + \delta_{3i} \delta_{3l} = \delta_{ki} \delta_{kl} = \delta_{il}$ .

Wird nun mit  $n = k$  verjüngt, erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}$$

Somit gilt für  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (d_1, d_2, d_3)$ , dass

$$\begin{aligned} d_i &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}a_jb_lc_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m = \\ &= \delta_{il}a_mb_lc_m - \delta_{im}a_jb_jc_m = b_i(a_m c_m) - c_i(a_j b_j) \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, dass  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

**Bemerkung.** Wegen der Invarianz bezüglich der zyklischen Vertauschung der Indizes erhalten wir

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k &= \epsilon_{jki}b_jc_ka_i = \epsilon_{kij}c_ka_ib_j \Rightarrow \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Bei der Verwendung der Summenkonvention muß man auch aufpassen. So ist etwa

$$\delta_{ii} = 3 \quad , \quad \delta_{ii}\delta_{kk} = 9 \quad , \quad \delta_{ik}\delta_{ik} = \delta_{ii} = 3$$

**Weitere Beziehungen.**

$$(i) \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (\text{siehe vorher})$$

$$(ii) \quad \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\text{Beweis.} \quad \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} .$$

Ist nun  $i = k = 1$  dann ist  $\delta_{ij}\delta_{jk} = 1 = \delta_{ik}$ .

Analog für  $i = k = 2$  und  $i = k = 3$ .

Ist  $1 = i \neq k$ , dann ist  $\delta_{1k} = 0$  und somit  $\delta_{ij}\delta_{jk} = 0 = \delta_{ik}$ .

Analog für  $2 = i \neq k$  und  $3 = i \neq k$ .

(iii) Verjüngung von (i) liefert

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}$$

$$(iv) \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$$

**Bemerkung.** Sei  $\epsilon_{ijk}$  ein  $\epsilon$ -Tensor und  $t_{lm}$  ein symmetrischer Tensor.

Zweimalige Verjüngung von  $\epsilon_{ijk}t_{lm}$  liefert

$$\epsilon_{ijk}t_{jk} = -\epsilon_{ikj}t_{jk} = -\epsilon_{ikj}t_{kj} = -\epsilon_{ijk}t_{jk}$$

Zum Schluß wurden die Indizes  $k \leftrightarrow j$  umbenannt. Daraus folgt dass

$$\epsilon_{ijk}t_{jk} = 0 .$$

Analog gilt für einen in den Indizes  $i, j$  symmetrischen Tensor  $t_{ij\dots}$  dass

$$\epsilon_{ijk}t_{ij\dots} = 0 .$$