Differenzialoperatoren und Tensoren

Die Elemente eines Tensors können auch Funktionen (man spricht dann auch von einem **Tensorfeld**, in der Physik werden Tensorfelder oft auch als Tensoren bezeichnet) sein, und auch Differenzialoperatoren. Die Anwendung eines Differenzialoperators beeinflusst dabei den Charakter eines Tensors in typischer Weise.

In diesem Sinne ist ein Tensorfeld nullter Stufe ein Skalarfeld, und ein Tensorfeld erster Stufe ein Vektorfeld. Man beachte, dass der Gradient eines Tensorfeldes nullter Stufe (also eines Skalarfeldes) ein Tensorfeld erster Stufe (ein Vektorfeld) ist. Durch Anwendung des Differenzialoperators wird also die Stufe um 1 erhöht.

Die orthogonale Transformation $\mathbf{R} = (r_{ij})$ führe die x_1, x_2, x_3 Koordinaten in die x'_1, x'_2, x'_3 Koordinaten über, i.e.

$$x'_i = r_{ij} x_j \quad \text{bzw.} \quad x_j = r_{ij} x'_i$$

Betrachten wir nun den Gradienten einer Skalarfunktion

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_1(x'_1, x'_2, x'_3), \ldots)$, dann gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'_i} = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial (r_{lj} x'_l)}{\partial x'_i} = r_{lj} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial x'_l}{\partial x'_i} =$$

$$= r_{lj} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \delta_{li} = r_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \; .$$

Daraus ist sofort das Transformationsverhalten eines Tensors 1. Stufe ersichtlich.

Nun sei $\mathbf{b}(x_1, x_2, x_3)$ ein ortsabhängiger Vektor, i.e. ein Vektorfeld. Dann ist

$$\frac{\partial b'_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial (r_{jk} b_k)}{\partial x'_i} = r_{jk} \frac{\partial b_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x'_i} = r_{jk} \frac{\partial b_k}{\partial x_l} \frac{\partial (r_{ml} x'_m)}{\partial x'_i} =$$

$$= r_{jk} r_{ml} \frac{\partial b_k}{\partial x_l} \delta_{mi} = r_{jk} r_{il} \frac{\partial b_k}{\partial x_l}$$

Dies wiederum entspricht genau den Transformationseigenschaften eines

Tensors 2. Stufe.

Diese Überlegungen können analog verallgemeinert werden und so findet man beispielsweise

$$\frac{\partial g'_{ij}}{\partial x'_k} = r_{ir} r_{js} r_{kt} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_t}$$

Die Bildung der Divergenz kann im Sinne der Tensoranalysis als einmalige Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe betrachtet werden,

$$\partial_i b_j \quad \rightarrow \quad \partial_i b_i$$

Bei der Bildung des Rotors wird ein Tensor 5. Stufe zweimal verjüngt,

$$\epsilon_{ijk} \partial_m b_n \quad \rightarrow \quad \epsilon_{ijk} \partial_j b_k$$

Mit Hilfe des ϵ-Tensors kann man dann etwa für $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ zeigen,

$$\epsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} a_m b_n) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} \partial_j (a_m b_n) =$$

$$= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})(b_n(\partial_j a_m) + a_m(\partial_j b_n)) =$$

$$= \delta_{im} b_j (\partial_j a_m) - \delta_{jm} b_i (\partial_j a_m) + a_i \delta_{jn} (\partial_j b_n) - a_j \delta_{in} (\partial_j b_n) =$$

$$= (b_j \partial_j) a_i - b_i (\partial_j a_j) + a_i (\partial_j b_j) - (a_j \partial_j) b_i$$

Dies bedeutet, dass

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$

Bemerkung. Man beachte, dass hier Differenzialoperatoren auftreten, die auf bestimmte Größen wirken. Daher darf man keine Vertauschungen vornehmen, die diesen Zusammenhang stören.

Beispiel. Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} \times \mathbf{a}$, wobei $\mathbf{a}$ ein konstanter Vektor ist.

Dann ist $b_i = \epsilon_{ijk} \frac{x_j a_k}{x_l x_l}$ und

$$\partial_i b_i = \partial_i (\epsilon_{ijk} \frac{x_j a_k}{x_l x_l}) = \epsilon_{ijk} (\partial_i x_j)(\frac{a_k}{x_l x_l}) + \epsilon_{ijk} (x_j a_k) \partial_i (\frac{1}{x_l x_l}) =$$

$$= \epsilon_{ijk}\delta_{ij}(\frac{a_k}{x_l x_l}) + \epsilon_{ijk}(x_j a_k)\frac{-2x_i}{(x_l x_l)^2} = -2\epsilon_{ijk}(\frac{x_i x_j a_k}{(x_l x_l)^2}) = 0$$

Weil $\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$, und wegen $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$ ist $0 = \epsilon_{kij}x_i x_j = \epsilon_{ijk}x_i x_j$.

Folglich ist $\mathrm{div}\mathbf{b} = 0$.

Bei der Bestimmung des Rotors von $\mathbf{b}$ erhalten wir für die m-te Komponente des Rotors

$$\epsilon_{mni}\partial_n(\epsilon_{ijk}\frac{x_j a_k}{x_l x_l}) = \epsilon_{mni}\epsilon_{jki}\partial_n(\frac{x_j a_k}{x_l x_l}) =$$

$$= (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})a_k[(\partial_n x_j)(\frac{1}{x_l x_l}) + x_j(\partial_n(\frac{1}{x_l x_l}))] =$$

$$= (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})a_k[\delta_{nj}\frac{1}{x_l x_l} + x_j\frac{-2x_n}{(x_l x_l)^2}] =$$

$$= \delta_{mj}\delta_{nk}a_k[\frac{\delta_{nj}}{r^2} - \frac{2x_n x_j}{r^4}] - \delta_{mk}\delta_{nj}a_k[\frac{\delta_{nj}}{r^2} - \frac{2x_n x_j}{r^4}]$$

$$= (\delta_{mj}a_n - \delta_{nj}a_m)[\frac{\delta_{nj}}{r^2} - \frac{2x_n x_j}{r^4}]$$

$\delta_{mj}\delta_{nj}\frac{a_n}{r^2} = \delta_{mn}\frac{a_n}{r^2} = \frac{1}{r^2}a_m$, $\delta_{mj}a_n \cdot -\frac{2x_n x_j}{r^4} = -\frac{2}{r^4}a_n x_n x_m = -\frac{2}{r^4}x_m(a_n x_n)$

$-\delta_{nj}a_m\frac{\delta_{nj}}{r^2} = -\frac{3}{r^2}a_m$, $-\delta_{nj}a_m \cdot -\frac{2x_n x_j}{r^4} = \frac{2}{r^4}a_m x_n x_n = \frac{2}{r^4}a_m r^2 = \frac{2}{r^2}a_m$

Folglich ist die m-te Komponente des Rotors $-\frac{2}{r^4}x_m(a_n x_n)$ und

$$\mathrm{rot}\mathbf{b} = -2\mathbf{r}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^4} \ .$$