Ko- und kontravariante Darstellung

Physikalische Sachverhalte sind vom verwendeten Koordinatensystem unabhängig. Sehr oft ist es sinnvoll, sie in verschiedenen Koordinatensystemen darzustellen. Bereits erwähnt wurden kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten etc. Wichtig ist dabei auch die Beschreibung des Wechsels von einem Koordinatensystem zum anderen. Eine weitere damit zusammenhängende Frage ist die nach der mathematischen Form von **Invarianten**, das sind Größen, die sich beim Wechsel des Koordinatensystems nicht ändern.

Ein sehr einfacher Fall eines Wechsels von einem Koordinatensystem zu einem anderen wäre etwa eine **Translation** (Verschiebung). Ein weiterer bereits erwähnter Fall ist die **Drehung** eines kartesischen Systems um eine Achse durch den Ursprung. Dieser Übergang wird durch eine orthogonale Transformation beschrieben.

Allgemeinere Transformationen liegen vor, wenn man von einem kartesischen oder krummlinigen System zu anderen solchen Systemen übergeht.

Betrachten wir nun zwei Koordinatensysteme, ein u-System und ein v-System, wo die Koordinaten mit Symbolen mit hochgestellten Indizes bezeichnet werden : $u^1, u^2, u^3, \ldots$ bzw. $v^1, v^2, v^3, \ldots$.

(Diese Schreibweise hat sich in den hier zu diskutierenden Sachverhalten als günstig erwiesen. Allerdings gilt es dabei, die Verwechslung mit Potenzen zu vermeiden.)

Eine Transformation im 3-dimensionalen Raum hat in dieser neuen Notation die Form

$$v^i = f^i(u^1, u^2, u^3) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

mit der Umkehrtransformation

$$u^k = h^k(v^1, v^2, v^3) \quad , \quad k = 1, 2, 3$$

Wenn wir die Differenzierbarkeit der v^i und u^k annehmen, ist wegen der Umkehrbarkeit die Jacobi-Determinante ungleich Null.

Damit kann beispielsweise dann auch die Beziehung zwischen den Differentialen ausgedrückt werden (Summenkonvention)

$$dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} du^k$$

Im besonderen kann auch der Ortsvektor mit Hilfe der beiden Koordinaten u^i oder v^i dargestellt werden.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3) = \mathbf{r}(v^1, v^2, v^3)$$

Das totale Differenzial des Ortsvektors kann daher auf beide Arten geschrieben werden,

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} du^3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} du^i \quad \text{(Summenkonvention)}$$
$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^1} dv^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^3} dv^3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i} dv^i$$

Mit vorher ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} du^k = d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i} dv^i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial u^k} du^k$$

und mittels Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial u^k} \ .$$

Bemerkung. Durch $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}$ werden die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien der u^k definiert,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} = h_{u^k} \mathbf{e}_{u^k} \qquad \text{(hier keine Summation über } k\text{)}$$

Folglich erhalten wir

$$h_{u^k} \mathbf{e}_{u^k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial u^k} = h_{v^i} \frac{\partial v^i}{\partial u^k} \mathbf{e}_{v^i}$$

und damit die Beziehung der Tangentenvektoren zwischen den u^k-Koordinaten und den v^i-Koordinaten.

Die Vektoren $\mathbf{e}_{u^k}$ und $\mathbf{e}_{v^i}$ bilden (siehe vorher) jeweils ein Basissystem, wenn sich die entsprechenden Koordinatenlinien in jedem Raumpunkt unter einem Schnittwinkel $\alpha \neq 0$ schneiden.

Verzichtet man darauf, normierte Einheitsvektoren als Basisvektoren zu haben, kann man statt der Vektoren $\mathbf{e}_{u^k}$ bzw. $\mathbf{e}_{v^i}$ auch die Vektoren $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}$ bzw. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i}$ als Basisvektoren verwenden.

Diese Basis heißt die **kontravariante Basis** und der von ihr aufgespannte Vektorraum heißt der **Tangentialraum**.

Anschaulich kann man sich den Tangentialraum an einem Punkt auch vorstellen als aufgespannt durch die Menge aller Tangenten zu beliebigen Kurven durch den betrachteten Punkt. Die Dimension ist dabei durch die Anzahl der linear unabhängigen Richtungen gegeben.

Bemerkung. Der Begriff des Tangentialraums spielt bei sogenannten "differenzierbaren Mannigfaltigkeiten" eine wesentliche Rolle.

Eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein Raum, welcher **lokal** (!) wie eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ "aussieht" (d.h. lokal kann jeweils ein n-dimensionales Koordinatensystem eingeführt werden). Dabei sind die Koordinatentransformationen auf jeweils zwei sich überlappenden offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ durch in beiden Richtungen stetig differenzierbare Abbildungen gegeben.

Beispiele für 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten wären etwa die Kugeloberfläche oder der Torus. Man beachte, dass es für diese Räume **kein** globales Koordinatensystem gibt (in dem Sinne, dass diese Räume global **nicht** wie eine offene Menge des $\mathbb{R}^2$ aussehen).

In der Relativitätstheorie werden 4-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten untersucht (Raum-Zeit-Kontinuum).

Ein Tangentialvektor $\mathbf{A}$ hat in der Basis der u^k-Koordinaten die Form

$$\mathbf{A} = A^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} + A^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} + A^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} = A^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$$

mit den Komponenten A^i . Auch hier sind die Indizes hochgestellt. Dabei handelt es sich allerdings um Vektorkomponenten und nicht um Koordinaten.

Diese Komponenten heißen **kontravariante Komponenten** und $\mathbf{A}$ ein **kontravariantes Vektorfeld**.

Dieses wird, wie gleich erwähnt wird, durch seine Transformationseigenschaften unter Koordinatentransformationen charakterisiert. Daneben gibt es noch Vektoren mit tiefgestellten Indizes (kovariante Komponenten) mit anderen Transformationseigenschaften.

Bezüglich der Transformationseigenschaften der kontravarianten Komponenten zeigt sich

$$\mathbf{A} = A^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = A^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^k} \frac{\partial v^k}{\partial u^i} = \left(A^i \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^k} = \hat{A}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^k} \ .$$

Also sind $\hat{A}^k = \frac{\partial v^k}{\partial u^i} A^i = \alpha_i^k A^i$ die Komponenten von $\mathbf{A}$ im System der v-Koordinaten.

Bemerkung. Die Summenkonvention wurde hier etwas modifiziert. Zuvor wurde über einen Index summiert, der jeweils einmal hochgestellt und einmal tiefgestellt vorkommt. Dieses Schema ist typisch für die Schreibweise mit kontravarianten und kovarianten Indizes.

Beispiel. Wir betrachten zwei Koordinatensysteme u^1, u^2 und v^1, v^2 , wobei $\mathbf{r} = (u^1 + 2u^2, u^1) = (v^1, 3v^2)$ (hier keine Potenzen !)

Dann ist $u^1 = 3v^2$, $u^2 = \frac{1}{2}(v^1 - 3v^2)$ und

$v^1 = u^1 + 2u^2$, $v^2 = \frac{1}{3}u^1$.

Oder $\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$

Wir erhalten $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = (1,1)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = (2,0)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^1} = (1,0)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^2} = (0,3)$

Hat nun ein (Tangential)Vektor $\mathbf{A}$ im u^1u^2-Koordinatensystem die Komponenten $A^1 = 5$, $A^2 = 1$, dann ergibt sich für die Komponenten im v^1v^2-System

$$\hat{A}^1 = \frac{\partial v^1}{\partial u^1} A^1 + \frac{\partial v^1}{\partial u^2} A^2 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 7$$

$$\hat{A}^2 = \frac{\partial v^2}{\partial u^1} A^1 + \frac{\partial v^2}{\partial u^2} A^2 = \frac{1}{3} \cdot 5 + 0 \cdot 1 = \frac{5}{3}$$

Man überprüft sofort $\quad \mathbf{A} = A^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = (7,5) = \hat{A}^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^i}$

Im Kapitel über Basissysteme krummliniger **orthogonaler** Koordinaten wurde eine weitere Darstellung für die Basisvektoren mittels des Gradienten angegeben. Umgeschrieben auf die Notation mit hochgestellten Indizes lautet diese Relation

$$\mathbf{e}_{u^i} = h_{u^i} \nabla u^i \qquad \text{(hier keine Summation über } i \text{ !)}$$

Bei allgemeinen (also i.a. nicht orthogonalen) Koordinaten wird die Richtung der Gradientenvektoren nicht immer mit den Richtungen der Tangentialvektoren (den $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$) übereinstimmen. Man hat in diesem Fall dann zwei unterschiedliche Basissysteme.

Verwendet man nun als Basisvektoren ∇u^i bzw. ∇v^i , dann bezeichnet man diese Basis als **kovariante Basis** . Diese unterscheidet sich im allgemeinen von der kontravarianten Basis.

Bemerkung. Die kovariante Basis spannt den Dualraum zum Tangentialraum auf. Aus diesem Grund sagt man auch, dass die beiden Basen dual zueinander sind (weil sie zueinander duale Räume aufspannen).

Ein Vektor $\mathbf{A}$ hat bzgl. der kovarianten Basis die Form

$$\mathbf{A} = A_1 \nabla u^1 + A_2 \nabla u^2 + A_3 \nabla u^3 = A_i \nabla u^i$$

(Die Komponenten eines Vektors in der kovarianten Basis werden mit tiefgestellten Indizes gekennzeichnet)

Beispiel. Im zuvor besprochenen Beispiel drücken wir die Koordinaten u^1 und u^2 zuerst durch kartesische Koordinaten x und y aus.

Dann ist $\quad u^1 = y$ und $u^2 = \frac{1}{2}(x-y)$.

Die Basisvektoren des kovarianten Systems werden nun durch die Gradienten bestimmt.

$$\nabla u^1 = (\tfrac{\partial u^1}{\partial x}, \tfrac{\partial u^1}{\partial y}) = (0,1) \quad , \quad \nabla u^2 = (\tfrac{\partial u^2}{\partial x}, \tfrac{\partial u^2}{\partial y}) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$

Hier unterscheiden sich also die kontra- und die kovarianten Basisvektoren.

Nun untersuchen wir die Transformation der Komponenten in der kovarianten Basis.

Zur Erinnerung: Beim Übergang auf das Basissystem der v^i-Koordinaten transformierten sich die kontravarianten Komponenten von $\mathbf{A}$ mittels

$$\hat{A}^k = \alpha^k_i A^i \quad \text{mit} \quad \alpha^k_i = \frac{\partial v^k}{\partial u^i}$$

Sei nun $\mathbf{A} = A_1 \nabla u^1 + A_2 \nabla u^2 + A_3 \nabla u^3 = \hat{A}_1 \nabla v^1 + \hat{A}_2 \nabla v^2 + \hat{A}_3 \nabla v^3$.

$$A_i \nabla u^i = A_i \begin{pmatrix} \frac{\partial u^i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u^i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u^i}{\partial x_3} \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} \frac{\partial u^i}{\partial v^1}\frac{\partial v^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u^i}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial x_1} + \frac{\partial u^i}{\partial v^3}\frac{\partial v^3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u^i}{\partial v^1}\frac{\partial v^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u^i}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial x_2} + \frac{\partial u^i}{\partial v^3}\frac{\partial v^3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u^i}{\partial v^1}\frac{\partial v^1}{\partial x_3} + \frac{\partial u^i}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial x_3} + \frac{\partial u^i}{\partial v^3}\frac{\partial v^3}{\partial x_3} \end{pmatrix} =$$

$$= A_i \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \nabla v^1 + A_i \frac{\partial u^i}{\partial v^2} \nabla v^2 + A_i \frac{\partial u^i}{\partial v^3} \nabla v^3$$

Damit ist $\mathbf{A} = A_1 \nabla u^1 + A_2 \nabla u^2 + A_3 \nabla u^3 =$

$$= A_1 \frac{\partial u^1}{\partial v^1} \nabla v^1 + A_1 \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \nabla v^2 + A_1 \frac{\partial u^1}{\partial v^3} \nabla v^3 +$$

$$+ A_2 \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \nabla v^1 + A_2 \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \nabla v^2 + A_2 \frac{\partial u^2}{\partial v^3} \nabla v^3 +$$

$$+ A_3 \frac{\partial u^3}{\partial v^1} \nabla v^1 + A_3 \frac{\partial u^3}{\partial v^2} \nabla v^2 + A_3 \frac{\partial u^3}{\partial v^3} \nabla v^3$$

Folglich ist $\hat{A}_k = A_1 \frac{\partial u^1}{\partial v^k} + A_2 \frac{\partial u^2}{\partial v^k} + A_3 \frac{\partial u^3}{\partial v^k} = \beta^i_k A_i \quad \text{mit} \quad \beta^i_k = \frac{\partial u^i}{\partial v^k}$

Die Größen $\alpha^k_i = \frac{\partial v^k}{\partial u^i}$ und $\beta^i_k = \frac{\partial u^i}{\partial v^k}$ transformieren also Vektoren zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen. Offenbar gilt

$$\beta^m_k \alpha^k_i = \frac{\partial u^m}{\partial v^k}\frac{\partial v^k}{\partial u^i} = \frac{\partial u^m}{\partial u^i} = \delta^m_i \qquad (\delta^m_i \ \ldots \ \text{Kroneckersymbol})$$

Wir erhalten weiters

$$\hat{A}^j = \alpha^j_n A^n \quad \Rightarrow \quad \beta^i_j \hat{A}^j = \beta^i_j \alpha^j_n A^n = \delta^i_n A^n = A^i$$

Zusammengefasst:

$$A^i = \beta^i_j \hat{A}^j \quad , \quad \hat{A}^i = \alpha^i_j A^j \quad , \quad A_i = \alpha^j_i \hat{A}_j \quad , \quad \hat{A}_i = \beta^j_i A_j$$

Durch das direkte Produkt zweier Vektoren (Tensoren 1. Stufe) entsteht ein Tensor 2. Stufe. Man kann hier wie zuvor vorgehen und kovariante und kontravariante Komponenten von Tensoren zweiter und höherer Stufe bilden,

$$T^{ik} = A^i B^k \ .$$

Für das Transformationsverhalten vom u-System zum v-System ergibt sich dabei

kontravariante Komponenten: $\hat{T}^{ik} = \hat{A}^i \hat{B}^k = \alpha^i_l \alpha^k_m A^l B^m = \alpha^i_l \alpha^k_m T^{lm}$

kovariante Komponenten: $\hat{T}_{ik} = \hat{A}_i \hat{B}_k = \beta^l_i \beta^m_k A_l B_m = \beta^l_i \beta^m_k T_{lm}$

Es sind auch gemischte Darstellungen möglich, bei denen sich die Komponenten entsprechend der Position der Indizes transformieren,

$$\hat{T}^i_k = \hat{A}^i \hat{B}_k = \alpha^i_l \beta^m_k A^l B_m = \alpha^i_l \beta^m_k T^l_m$$

Bemerkung. Es handelt sich hier immer um die Komponenten ein- und derselben physikalischen Größe. Es wird nur der diese Größe beschreibende Tensor unterschiedlich dargestellt.

Die Stufe des Tensors entspricht dabei immer der Gesamtzahl seiner nichtverjüngten Indizes. Nach der hier verwendeten Konvention, die Summation nur jeweils auf ein Paar bestehend aus einem kovarianten und einem kontravarianten Index anzuwenden, kann man **nur** gemischte Tensoren verjüngen.

$$T^i_k \ \to \ T^i_i = S \quad \text{oder} \quad T^{ik}_l \ \to \ T^{ik}_i = A^k$$

Beispiel. Der Ausdruck $S = A^i B_i$ ist ein Skalar. Dabei sind die A^i kontravariante und die B_i kovariante Komponenten von Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ im u-System.

Beim Koordinatenwechsel in das v-System erhalten wir

$$\hat{S} = \hat{A}^k \hat{B}_k = (\alpha^k_i A^i)(\beta^l_k B_l) = \alpha^k_i \beta^l_k A^i B_l = \delta^l_i A^i B_l = A^i B_i = S$$

Das auf diese Art definierte "Skalarprodukt" bleibt also invariant!

Bemerkung. Der ϵ-Tensor (auch mit mehr als drei Indizes) wird als kontravarianter Tensor behandelt $\epsilon^{k_1 k_2 \ldots k_n}$.

Wie kann man nun aus den kontravarianten Komponenten eines Vektors die kovarianten Komponenten (und umgekehrt) bestimmen ?

Die gesuchte Beziehung hat die Form

$$A_i = g_{ij} A^j \quad \text{oder} \quad A^i = g^{ij} A_j \ .$$

Dabei ist g_{ij} der so genannte **metrische Tensor** (oder auch **Maßtensor**). Er hat zwei kovariante Indizes, und einer davon "zieht" gleichsam den kontravarianten Index A^j nach unten.

Dieses Verhalten soll nun für alle Tensoren gelten, i.e.

$$g_{ij} T^{jk} = T^k_i \quad \text{oder} \quad g_{ij} T^j_k = T_{ik} \quad \text{oder} \quad g^{ij} T_{jk} = T^i_k \quad \text{etc.}$$

Angewandt auf den metrischen Tensor selbst, muss es daher den metrischen Tensor auch mit zwei kontravarianten Indizes oder auch mit einem kovarianten und einem kontravarianten Index geben. Wir erhalten

$$g_{jl} g^{kl} = g^k_j \ \Rightarrow \ g_{ik} g_{jl} g^{kl} = g_{ik} g^k_j = g_{ij} \ .$$

Weiters ist

$$g^{ij} = g^{ik} g^j_k \quad \text{folglich} \quad g^j_k = \delta^j_k \ \Rightarrow \ g_{ij} g^{jk} = g^k_i = \delta^k_i \ .$$

Als Matrix betrachtet ist der kontravariante metrische Tensor also die inverse Matrix des kovarianten metrischen Tensors.

Bemerkung. Ein invarianter Ausdruck kann mit Hilfe des metrischen Tensors offenbar auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$A^i A_i = g^{ij} A_j A_i = g_{ij} A^i A^j$$

Daraus sieht man auch, dass der metrische Tensor symmetrisch ist.

Das Quadrat des totalen Differenzials der Bogenlänge ist ein invarianter Skalar und hat daher in jedem System denselben Wert.

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} du^i\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} du^j\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}\right) du^i du^j$$

Setzen wir $g_{ij} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}\right) = (\mathbf{e}_{u^i} \cdot \mathbf{e}_{u^j}) h_{u^i} h_{u^j}$,

dann stellt sich durch direkte Rechnung heraus, dass die geforderten Eigenschaften erfüllt sind und wir auf diese Weise den metrischen Tensor ermittelt haben.

Damit gilt also $(ds)^2 = g_{ij} du^i du^j$.

Für orthogonale Systeme ist $\mathbf{e}_{u^i} \cdot \mathbf{e}_{u^j} = \delta_{ij}$ und der metrische Tensor wird diagonal.

Folglich $(ds)^2 = h_{u^i}^2 (du^i)^2$. Bei nicht-orthogonalen Systemen wird es Mischterme geben.

Beispiel. Als System der u-Koordinaten nehmen wir das kartesische Basissystem, also $u^i = x^i$. Die kontravariante Basis der $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ wird dann durch die kanonischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ gebildet.

Für das v-System wählen wir Zylinderkoordinaten ρ, φ und x^3 und erhalten in diesem Fall für die kontravarianten Basisvektoren $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v^k}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der metrische Tensor für das kartesische System ist die Einheitsmatrix $(g_{ij} = \delta_{ij})$ und für das (ebenfalls orthogonale) System der Zylinderkoordinaten

$$\hat{g}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung. In der speziellen Relativitätstheorie haben die Vektoren vier Komponenten, eine für die Zeit und drei räumliche. Im Falle einer "flachen" Raum-Zeit kann der metrische Tensor als Diagonalmatrix mit den Komponenten

$$g_{ij} = g^{ij} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

geschrieben werden. Diese Metrik heißt auch die **Minkowski Metrik**.