Musterbeispiele
Vektoranalysis

1. Man bestimme das begleitende Dreibein für die Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^3 \\ 1+t^2 \end{pmatrix} \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

   im Punkt $P(2,1,2)$.

2. Gegeben sei das Vektorfeld
   $\vec{F} = (x_1 + e^{x_2} + \cos x_3 \; , \; x_1 e^{x_2} + x_2 + x_3 \; , \; -x_1 \sin x_3 + x_2)$.
   Man überprüfe, ob $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist und bestimme gegebenenfalls eine Skalarfunktion Φ mit $\vec{F} = \text{grad}\Phi$.

3. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F} = (3x_1^2 + 2x_1 e^{x_2} - \sin x_3 \; , \; x_1^2 e^{x_2} + x_3 \; , \; -x_1 \cos x_3 + x_2)$$

   Man verifiziere mit dem in der Vorlesung erwähnten Kriterium, dass $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist und bestimme eine Skalarfunktion Φ mit $\vec{F} = \text{grad}\Phi$.

4. Man berechne auf direkte Art das Linienintegral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$, wobei
   $\vec{F} = (x_1 + x_2, x_3, 3)$ ist und C die Schnittkurve der beiden Flächen
   $x_3 = 1 - x_1^2 \;\; , \;\; x_1^2 + x_2^2 = 1$ ist.

5. Man bestimme auf direkte Weise das Linienintegral

$$L = \int_C (x_1 - \cos \pi x_3) dx_1 + \frac{x_3}{1+x_2^2} dx_2 + x_2 e^{x_1} dx_3$$

   wobei C jenes Kurvenstück ist, das die Punkte $A(0,0,0)$ und $B(1,1,1)$ entlang der Schnittkurve der beiden Flächen $x_1 = x_2^2$ und $x_2 = x_3$ verbindet.

6. Sei $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ ein Vektorfeld und $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ eine Skalarfunktion.
   Man zeige, dass $\nabla \times (\Phi \vec{F}) = \nabla \Phi \times \vec{F} + \Phi(\nabla \times \vec{F})$.

7. Man berechne das Oberflächenintegral $\iint\limits_{O} \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot \vec{n}\ dA$
mit $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2\ ,\ x_3^2\ ,\ x_1 - x_3)$, wobei O die Oberfläche des durch die Flächen $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ begrenzten Bereiches ist, unter Verwendung des Integralsatzes von Gauss.

8. Man berechne das Linienintegral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$, wobei
$\vec{F} = (2x_1 - x_2\ ,\ -x_2 x_3^2\ ,\ -x_2^2 x_3)$ und C die Berandung der Halbkugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_3 \geq 0$ ist, unter Verwendung des Satzes von Stokes.