

Vektoranalysis (für PhysikerInnen) SS 2012

2. Übungsblatt

Aufgabe 1: Bogenlängen

- a.) Berechnen Sie die Bogenlänge der Traktrix

$$x = a \operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

mit $0 < b \leq y \leq a$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

- b.) Berechnen Sie die Bogenlänge der in Polarkoordinaten angegebenen Kurve

$$r = \frac{e^\phi - 1}{e^\phi + 1}$$

mit $0 \leq \phi \leq \alpha$ und $\alpha > 0$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Flächenberechnungen

- a.) Berechnen Sie den Inhalt jener Fläche, die von der Zissoide $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$ und der Geraden $x = \frac{1}{2}$ begrenzt wird.
- b.) Bestimmen Sie den Inhalt F der Fläche, die von den Kurven $f_1(x) = \frac{2\pi}{9}x^2$, $f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ und der Geraden $x = 0$ begrenzt wird.
- c.) Bestimmen Sie die von der Kurve $r^2 = 2 + \sin(\phi) + \cos(\phi)$ eingeschlossene Fläche.
- d.) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $r(\phi) = \frac{\sqrt{\cos(\phi)}}{2 + \sin(\phi)}$ eingeschlossen wird.
- e.) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - 1}}$$

Aufgabe 3: Konvergenz

- a.) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x}}$$

- i.) auf Konvergenz und geben Sie eine Abschätzung nach oben an und ii.) finden Sie eine nichttriviale Abschätzung nach unten.

b.) *Zeigen Sie die (absolute) Konvergenz des Fresnelschen Integrals

$$S := \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie

a.) für $|x| < \frac{\pi}{2}$ dass $\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$

b.) für $|x| < \pi$ gilt dass $\sin(x) = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$.