KFU Graz V. Mader, G. Engel
TU Graz D. Tögl, D. Berger

Vektoranalysis (für PhysikerInnen) SS 2012

5. Übungsblatt: Kugelkoordinaten

Aufgabe 1: Die Parametrisierung durch Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} . \qquad (1)$$

a.) Bestimmen Sie die Basisvektoren der Kugelkoordinaten ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$) durch Differenziation der Parametrisierung nach den Parametern und anschließender Normierung. (Z.B.: $\vec{e}_\vartheta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} / \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\right|$)

b.) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ ein Orthonormalsystem bilden. In welcher Reihenfolge bilden die Vektoren ein rechtshändiges System?

c.) Bestimmen Sie die Komponenten des kartesischen Vektors $\vec{v} = (3, 0, 4)$ in Kugelkoordinaten: $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\vartheta\vec{e}_\vartheta + v_\varphi\vec{e}_\varphi$. (Hinweis: in Orthnormalsystemes ergeben sich die Komponenten durch Projektion auf die Koordinatenlinien). Überprüfen Sie das Ergebnis durch Rückeinsetzen.

d.) Wie lauten diese Komponenten und die Basisvektoren für die Winkel ϑ, φ von $\vec{v}$? Wie lauten sie für $\vartheta = \varphi = 0$? Was bedeutet das Ergebnis?

Aufgabe 2: Transformationsformel / Jacobi-Determinante :

a.) Betrachten Sie wieder die Parametrisierung von Gleichung (1). Bestimmen Sie den Absolutbetrag der Jacobi-Determinante $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)}\right|$.

b.) Benutzen Sie diese um für die Dichtefunktionen $f(\vec{r}) = \rho = \text{const.}$ und $f(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}$ die Masse der Kugel $0 \leq r \leq R$ zu bestimmen.

Aufgabe 3: Bahnkurve in Kugelkoordinaten : Ein Teilchen bewege sich entlang einer allgemeinen Bahnkurve $\vec{r}(t)$, gegeben in Kugelkoordinaten:

$$r = r(t)\ , \vartheta = \vartheta(t)\ , \varphi = \varphi(t)\ . \qquad (2)$$

a.) Die Basisvektoren der krummlinigen Kugelkoordinaten verändern sich entlang der Banhkurve. Benutzen Sie die Basisvektoren ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$) (Ergebnis von Aufgabe (1a)) und Gleichung (2) um die zeitlichen Änderungen der Basisvektoren, $\frac{d}{dt}\vec{e}_r$, $\frac{d}{dt}\vec{e}_\vartheta$, und $\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi$, in Kugelkoordinaten zu bestimmen.

b.) Der Ortsvektor des Teilchens ist gegeben durch $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$ in Kugelkoordinaten. (Hinweis: Beachten Sie die Zeitabhängigkeit der Basisvektoren.) Bestimmen Sie auch die Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$ für den Spezialfall $\vartheta = \text{const.}$.