KFU Graz — V. Mader, G. Engel
TU Graz — D. Tögl, D. Berger

# Vektoranalysis (für PhysikerInnen) SS 2012

6. Übungsblatt: Nabla, Divergenz, Rotation und Fluss

Aufgabe 1: Zeigen Sie:

a.) Jedes Gradientenfeld ist wirbelfrei.

b.) Jedes Rotorfeld ist quellenfrei.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Linienintegrale längs der der Kurve mit $0 \leq t \leq 1$

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie ob das Linienintegral vom Weg C abhängig ist und bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential.

a.) $\int_C \vec{v}\mathrm{d}\vec{x} = \int_C yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$

b.) $\int_C \vec{v}\mathrm{d}\vec{x} = \int_C x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Fluß des Flächenstücks $F$ mit Vektorfeld $\vec{K}$.

a.) $F : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ und

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b.) $F : x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ und

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ 3y \\ -z \end{pmatrix}$$

**Hinweis 1** *Verwenden Sie Kugelkoordinaten.*

**Bemerkung 1** *Als Maß für den Fluß kann man die Projektion von $\vec{K}$ parallel zu $\vec{n}$ mal Flächenelement* do *summiert über die ganze Fläche verstehen.*

Aufgabe 4: Rotor und Gradient

a.) Gesucht ist der Ausdruck für $\vec{A} = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{K}) - \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{K})$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} z^2 - y^2 \\ xyz \\ x+y \end{pmatrix}$$

b.) Gesucht ist der Ausdruck für $\vec{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{K}) - \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\vec{f})$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix} f = x^2y + y^2z + z^2x$$

Aufgabe 5: Integrabilitätsbedingungen
Bestimmen Sie $g(x, y)$ derart, dass der Integrand des Linienintegrals

$$L = \int_C \frac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + g(x, y)\mathrm{d}y$$

den Integrabilitätsbedingungen genügt. Für welche Gebiete $G \subset \mathbb{R}^2$ ist dann das Integral wegunabhängig?