KFU Graz
TU Graz

V. Mader, G.Engel,
D. Tögl, D. Berger

Vektoranalysis (für PhysikerInnen) SS 2012

7. Übungsblatt

Aufgabe 1: Zeigen Sie die Relation

$$\Delta\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{v}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$.

Aufgabe 2: Gegeben seien elliptische Zylinderkoordinaten,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\cosh(u)\cos(v) \\ a\,\sinh(u)\sin(v) \\ z \end{pmatrix}.$$

a.) Zeichnen Sie die Koordinatenlinien in der $z = 0$ Ebene. Bestimmen Sie die Basisvektoren $\vec{e}_{u_i}$ und Maßstabsfaktoren h_{u_i}. Zeigen sie Orthogonalität der Basisvektoren.

b.) Berechnen sie die zur obigen Basis gehrigen Komponenten und bestimmen sie für $v = \frac{\pi}{2} = const$ den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ in dieser Basis.

Aufgabe 3: Geben seien parabolische Koordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv\cos(\phi) \\ uv\sin(\phi) \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{pmatrix}.$$

a.) Bestimmen Sie die Basisvektoren $\vec{e}_{u_i}$, Maßstabsfaktoren h_{u_i} und zeigen sie Orthogonalität der Basisvektoren.

b.) Bestimmen sie den Nabla-Operator in obiger Basis und berechnen Sie den Gradienten des Feldes

$$\Phi(u, v, \phi) = u^2 + v^2 - uv\,.$$

Aufgabe 4: Drücken Sie den Vektor $\vec{a} = x_3\vec{e}_1 - 2x_1\vec{e}_2 + x_2\vec{e}_3$ in Zylinderkoordinaten, d.h. in den entsprechenden Variablen ρ, ϕ, z und Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ aus.