Übungen Vektoranalysis - SS 2012

Übungsblatt 9

1. Verifizieren Sie durch Ausrechnen von linker und rechter Seite dass

   (i) $\nabla \times (\Phi \vec{F}) = \nabla \Phi \times \vec{F} + \Phi(\nabla \times \vec{F})$

   (ii) $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

   (iii) Folgern Sie daraus: sind $\vec{F}$ und $\vec{G}$ wirbelfrei, dann ist $\vec{F} \times \vec{G}$ quellenfrei.

2. Sei $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $r = |\vec{r}|$. Weiters sei $f(r)$ eine nur von r abhängige Funktion.

Man zeige, dass $\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r} \vec{r}$.

3. Man zeige, dass $\Delta r^n = n(n+1) r^{n-2}$ (mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

4. Betrachte $x_1 = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)$, $x_2 = u_1 u_2$, $x_3 = u_3$.

Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{e}_{u_1}, \vec{e}_{u_2}, \vec{e}_{u_3}$ und zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis vorliegt.
Bestimmen Sie dann die Komponenten des kartesischen Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

5. Mit Hilfe des Satzes von Green bestimme man $\oint_{C=\partial B} (x_1 x_2^2 - 2x_1) dx_1 + (x_1 - e^{x_2}) dx_2$, wobei der Bereich B von den Kurven $x_2 = x_1 + 2$ und $x_2 = x_1^2$ eingeschlossen wird.