KFU Graz
TU Graz

V. Mader, G. Engel
D. Tögl, D. Berger

Vektoranalysis (für PhysikerInnen) SS 2012

10. Übungsblatt: Gauss, Green und Stokes

Aufgabe 1: Verwenden Sie den Satz von Green.

a.) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$I = \oint_C y^3\,dx + x^2 y\,dy$$

wobei C der Rand jenes Bereiches ist, der durch die Geraden $y = 0$, $y = 4 + x$ und $y = 4 - x$ gegeben ist.

b.) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$I = \oint_C (3x^3 y + xy^3)\,dx + 2\,dy$$

wobei C der Rand jenes Bereiches ist, der durch $0 \leq y \leq x$ und $x^2 + y^2 \leq 4$ gegeben ist.

Aufgabe 2: Verwenden Sie den Satz von Stokes.

a.) Berechnen Sie

$$I = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{V}, \vec{n} \rangle dA$$

wobei $\vec{V} = (x^2 + z, x - y, yz)^t$ und S eine Fläche, welche durch $C_1 : y = 4 - x^2$ für $-2 \leq x \leq 2$, $z = 0$, sowie $C_2 : z = 4 - x^2$ für $-2 \leq x \leq 2$, $y = 0$ berandet wird und $\vec{n}$ der normierte Normalvektor auf S ist.

b.) Berechnen Sie

$$I = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{V}, \vec{n} \rangle dA$$

wobei $\vec{V} = (z, -z, y)^t$ ein Vektorfeld darstellt und S eine durch folgende Kurve C berandete Fläche ist.

$$\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$ und $\vec{n}$ in jedem Punkt der normierte Normalvektor auf S darstellt.

Aufgabe 3: Verwenden Sie den Satz von Gauß.

a.) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \iint_{\partial B} (x + e^{z^2})dy\,dz + (x^2 - y^2 + z^2)dz\,dx + (1 - xyz)dx\,dy$$

mit Zylinderkoordinaten. Dabei ist B jener Bereich, der von den beiden Flächen $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ und $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ eingeschlossen wird.

b.) Berechnen Sie obige Beispiel ohne Zylinderkoordinaten.

c.) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \iint_{\partial B} (x + e^{z^2})dy\,dz + (1 + xz^2)dz\,dx + (x^2 + y^2 + z^2)dx\,dy.$$

Dabei ist B jener Bereich, der von den beiden Flächen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ eingeschlossen wird.

d.) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \iint_{\partial B} (2xy + z^3)dy\,dz + (x^2 - y^2)dz\,dx + (z + xy)dx\,dy.$$

Dabei ist B jener Bereich, der von den beiden Flächen $z = 8 - (x^2 + y^2)$ und $z = 1 + 2x + 2y$ eingeschlossen wird.

e.) Gegeben ist die Vektorfunktion

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \\ 2y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{o}$, wobei B jener räumliche Bereich ist, der von den Flächen $x^2 + y^2 = 1$, $z = x + y$ und $z = 10 - x - 2y$ eingeschlossen wird.

f.) Gegeben ist die Vektorfunktion

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ x + yz \\ yz \end{pmatrix}.$$

und jener Bereich B, der von den Flächen $z = 0$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ und $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ eingeschlossen ist und den Koordinatenursprung nicht enthält. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{o}$.

Hinweis 1 *Integrieren Sie zunächst entlang r anstatt über z nach geeigneter Transformation.*