Vektoranalysis - 2. Übungstest
Lösungen

1) $L = \oint_C 2xydx + (x^2+y)dy$

(a) $C_1: \quad y=0\ ,\ 0 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad dy = 0$ und $L_1 = 0$.

$C_2: \quad y = -\frac{x}{2}+1 \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{1}{2}dx$

$$L_2 = \int_2^0 [2x(-\tfrac{x}{2}+1) + (x^2 - \tfrac{x}{2}+1)\cdot -\tfrac{1}{2}]dx = \int_2^0 [-\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{4}x - \tfrac{1}{2}]dx =$$

$$= \int_0^2 [\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{4}x + \tfrac{1}{2}]dx = [\tfrac{x^3}{2} - \tfrac{9}{8}x^2 + \tfrac{x}{2}]\,\Big|_0^2 = \tfrac{1}{2}\ .$$

$C_3: \quad x = 0 \quad dx = 0$

$$L_3 = \int_1^0 ydy = -\int_0^1 ydy = -\tfrac{y^2}{2}\,\Big|_0^1 = -\tfrac{1}{2}\ .$$

$L = L_1 + L_2 + L_3 = 0$.

(b) $V_1 = 2xy\ ,\ V_2 = x^2 + y$ und $\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_B (\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y})dxdy = 0$.

2) (a) $\frac{1}{r^3}\vec{r} = \begin{pmatrix} xr^{-3} \\ yr^{-3} \\ zr^{-3} \end{pmatrix}$

$$\nabla \cdot (\tfrac{1}{r^3}\vec{r}) = r^{-3} - 3xr^{-4}r_x + r^{-3} - 3yr^{-4}r_y + r^{-3} - 3zr^{-4}r_z =$$

$$= 3r^{-3} - 3x^2r^{-5} - 3y^2r^{-5} - 3z^2r^{-5} = 3r^{-3} - 3r^{-5}(x^2+y^2+z^2) = 0$$

(b) $\nabla\frac{1}{r} = \begin{pmatrix} -r^{-2}\frac{x}{r} \\ -r^{-2}\frac{y}{r} \\ -r^{-2}\frac{z}{r} \end{pmatrix} = -\frac{1}{r^3}\vec{r}$. Mit (a) folgt damit $\Delta\frac{1}{r} = 0$.

3) $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$, damit ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld.

Also existiert eine Skalarfunktion ϕ mit
$\phi_x = e^{xz} + xze^{xz}$, $\phi_y = 2yz$, $\phi_z = x^2 e^{xz} + y^2$.

Integration nach z liefert $\phi = xe^{xz} + y^2 z + \varphi(x,y)$.

$\phi_y = 2yz$ liefert : $2yz + \varphi_y = 2yz \quad \Rightarrow \quad \varphi_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,y) = \psi(x)$

Also $\phi = xe^{xz} + y^2 z + \psi(x)$

$\phi_x = e^{xz} + xze^{xz}$ liefert : $e^{xz} + xze^{xz} + \psi' = e^{xz} + xze^{xz} \quad \Rightarrow \quad \psi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = C$

z.B. $\psi = 0$. Damit ist $\phi(x,y,z) = xe^{xz} + y^2 z$.

4) $\vec{F} = \begin{pmatrix} yz \\ xy \\ x^3 + z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{F} = x + 1$

Bei Verwendung von Zylinderkoordinaten ist der Volumsbereich beschrieben durch

$0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le r^2$.

$$\iiint\limits_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{r^2} (r\cos\varphi + 1) r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (r^4 \cos\varphi + r^3) d\varphi dr = \int\limits_{r=0}^{1} (r^4 \sin\varphi + r^3\varphi)\Big|_0^{2\pi} dr = 2\pi \int\limits_{r=0}^{1} r^3 dr = \frac{\pi}{2} \ .$$