KFU Graz — V. Mader, G. Engel
TU Graz — D. Tögl, D. Berger

# Vektoranalysis (für PhysikerInnen) SS 2012

1. Zwischenklausur (4 Beispiele).
Erklären Sie alle Zwischenschritte ausführlich.

Aufgabe 1:
Die Parametrisierung eines Torus ist gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} (R+\rho\cos\varphi)\cos\vartheta \\ (R+\rho\cos\varphi)\sin\vartheta \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$R = \text{const},\ \rho \geq 0,\ \vartheta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [0, 2\pi)\ .$$

a. Bestimmen Sie die Basisvektoren der Toruskoordinaten $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\vartheta,\ \vec{e}_\varphi)$ durch Differenziation der Parametrisierung nach den Parametern und anschließender Normierung.

b. Bestimmen Sie den Absolutbetrag der Jacobi-Determinante $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,\varphi)}\right|$.

c. Benutzen Sie diese um das Volumen eines Torus zu bestimmen.

$$V = \int_{\rho=0}^{\rho_0} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}\right| d\varphi d\vartheta d\rho$$

Aufgabe 2:
Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}} dx$$

a. auf Konvergenz,

b. geben Sie eine Abschätzung nach oben an und

c. finden Sie eine nichttriviale Abschätzung nach unten.

Aufgabe 3:
Gegeben sei folgende Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos(\omega t) \\ \omega t + \sin(\omega t) \\ 4\cos(\frac{\omega t}{2}) \end{pmatrix}\ ;\ \omega > 0\,.$$

Bestimmen Sie das Begleitende Dreibein.

Angabe: $\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}\,(1-\cos(\alpha))$

Aufgabe 4:
Der Bereich $S \subset \mathbb{R}^2$ ist definiert über

$$S := \left\{ (x, y) \,\middle|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\; y \geq 0 \right\}$$

a. Skizzieren Sie $S$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Bereichs sowie seine Schwerpunktskoordinaten $(x_0, y_0)$.

b. Bestimmen sie den Wert des Doppelintegrals

$$I = \iint\limits_S \frac{1}{x^2 + y^2} \, d\,(x, y)$$