

1. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad f(x \pm 2\pi) = f(x),$$

in eine Fourierreihe.

2. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \cos x & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x \pm 2\pi) = f(x),$$

in eine Fourierreihe.

3. Beweisen Sie die „Umrechnungsformeln“ zwischen reeller und komplexer Darstellung trigonometrischer Polynome (bzw. Reihen): Wenn

$$P_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$P_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega n t},$$

dann gilt für  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0/2 & a_0 &= 2c_0 \\ c_n &= (a_n - ib_n)/2 & a_n &= c_n + c_{-n} \\ c_{-n} &= (a_n + ib_n)/2 & b_n &= i(c_n - c_{-n}). \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

für die komplexen Fourier-Koeffizienten einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$ .

4. Entwickeln Sie die Funktion  $f(x) = x(\pi - x)$  für  $0 \leq x < \pi$ ,  $f(x)$  ungerade im Intervall  $(-\pi, \pi)$ ,  $f(x \pm 2\pi) = f(x)$  in eine Fourierreihe. In welchen Punkten konvergiert diese gegen  $f(x)$ ?