

5. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Hinweis: Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

wobei C_R das Rechteck mit den Eckpunkten $-R, R, R+it, -R+it$ bezeichnet. Lassen Sie $R \rightarrow \infty$ streben und benützen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

6. Bestimmen Sie die Funktion, der Fourier-Transformierte durch $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 2\omega + 2}$ gegeben ist. Hinweis: entweder helfen Methoden aus der Analysis T2 oder der Verschiebungssatz.
7. Rechnen Sie den zweidimensionalen Laplace-Operator

$$\Delta f(x, y) = f_{xx} + f_{yy}$$

in Polarkoordinaten um.

8. Sei $f(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + R \cos(t), y_0 + R \sin(t)) dt - f(x_0, y_0) \right).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Formel.