

13. Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$u_{xx} = 4u_{tt}, \quad u(0, t) = u(3\pi, t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 2\pi \\ 3\pi - x & \text{für } 2\pi \leq x \leq 3\pi \end{cases}$$

und

$$u_t(x, 0) = \sin(x) + \sin(3x).$$

14. Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$u_{xx} = u_{tt}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x \\ u_t(x, 0) &= \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

15. Bestimmen Sie die Moden der Wellengleichung auf dem Rechteck $[0, A] \times [0, B]$

$$\begin{aligned} a^2 \Delta u &= u_{tt} \\ u(0, y, t) &= u_x(A, y, t) = u(x, 0, t) = u_y(x, B, t) = 0, \quad x \in [0, A], \quad y \in [0, B]. \end{aligned}$$

16. Vergleichen Sie die Moden der Wellengleichung auf dem Rechteck $[0, 1] \times [0, \frac{1}{10}]$

$$\begin{aligned} a^2 \Delta u &= u_{tt} \\ u(0, y, t) &= u(1, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_y(x, \frac{1}{10}, t) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad y \in [0, \frac{1}{10}] \end{aligned}$$

mit den Moden der Saitenschwingungsgleichung

$$\begin{aligned} a^2 v_{xx} &= v_{tt} \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0. \end{aligned}$$