

18. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

die Besselsche Differentialgleichung für $\nu = \frac{1}{2}$ erfüllt.

19. Seien u und v zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Wenden Sie den Integralsatz von Gauss auf die Integrale

$$\oiint_{\partial B} u \operatorname{grad} v \, d\vec{\sigma} \quad \text{und} \quad \oiint_{\partial B} v \operatorname{grad} u \, d\vec{\sigma}$$

an und zeigen Sie damit

$$\iiint_B (u \Delta v - v \Delta u) \, dx \, dy \, dz = \oiint_{\partial B} (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \, d\vec{\sigma}.$$

20. Zeigen Sie für skalare Funktionen f, g und Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(fg) &= f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f \\ \operatorname{div}(f\vec{V}) &= \langle \operatorname{grad} f, \vec{V} \rangle + f \operatorname{div}(\vec{V}) \\ \operatorname{rot}(f\vec{V}) &= \operatorname{grad}(f) \times \vec{V} + f \operatorname{rot} \vec{V} \\ \operatorname{div}(\vec{V} \times \vec{W}) &= \langle \vec{W}, \operatorname{rot} \vec{V} \rangle - \langle \vec{V}, \operatorname{rot} \vec{W} \rangle \end{aligned}$$

21. Zeigen Sie, dass

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

die Gleichung $\Delta f = 0$ für $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ erfüllt. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2} \operatorname{grad} f \, d\vec{\sigma}.$$