

32. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$4u_{xx} = u_t$$

mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ und der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = x(\pi - x).$$

33. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} = u_t$$

mit den Randbedingungen $u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$ und der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = x(\pi - x).$$

34. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$9u_{xx} = u_t$$

mit den Randbedingungen $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$ und der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = x(\pi - x).$$

35. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} = u_t$$

mit den Randbedingungen $u(0, t) = -1$ und $u(\pi, t) = 1$ und der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi}(2x - \pi).$$

32)

Wärmeleitungsgleichung

$$4 u_{xx} = u_t$$

Randbedingung
Anfangsbed.

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = x(\pi - x)$$

Separationsansatz

Separationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow u_t = X(x)T'(t) \quad \& \quad u_{xx} = X''(x)T(t)$

Einsetzen: $4 \cdot X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad | : 4 X(x)T(t)$

$$\frac{4 \cdot X''(x)T(t)}{4 X(x)T(t)} = \frac{X(x)T'(t)}{4 X(x)T(t)} = -\lambda^2 \quad \lambda \dots \text{Trennkonstante}$$

- Zeitabhängigkeit $T(t)$:

$$T(t) + 4\lambda^2 T(t) = 0$$

(lösen)

$$\Rightarrow T(t) = C e^{-4\lambda^2 t}$$

- Ortsabhängigkeit $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \xrightarrow{\text{lösen}} \text{Allgemein} = X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

Allgemeine Lösung d. Wärmeleitungsgleichung:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] \cdot C e^{-4\lambda^2 t}$$

- mit der Randbedingung: $X(0) = X(\pi) = 0$

$$x=0: A=0$$

$$x=\pi: B \sin(n\pi) = 0$$

$$\lambda = n$$

NR

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$$B \sin(\lambda x)$$

$$\lambda\pi = \pi n$$

$$\Rightarrow \text{Allgemeine Lösung: } u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-4n^2 t}$$

aus der Anfangsbedingung b_n bestimmen: $u(x,0) = x(\pi - x)$

$$u(x,0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Fourier-Koeffizienten:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\pi \sin(nx) - x^2 \sin(nx) dx$$

= ... (Partielle Integration)

Kann ausgelesen werden
Wert in VO durch gemacht
worden ist

$$b_n = \frac{4 - 2\pi n \sin(\pi n) - 4 \cos(\pi n)}{\pi n^3}$$

$$\sin(n\pi) = 0$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 - 4 \cdot (-1)^n}{\pi n^3} \sin(nx) \cdot e^{-4n^2 t}$$

33)

$$u_{xx} = u_t$$

$$\text{RB } u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$$

$$\text{AB } u(x,0) = x(\pi - x)$$

$$\text{Separationsansatz } u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$u_{xx} = u_t \Rightarrow X''T = XT' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\rightarrow \text{Zeitabhängigkeit lösen: } T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

$$T(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\rightarrow \text{Ortsabhängigkeit lösen: } X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$\text{mit RB: } X(0) = A \cos(0) + B \sin(0) \Rightarrow A = 0$$

$$X(x) = B \sin(x)$$

$$X'(x) = B \cos(x)$$

$$X'(\pi) = B \cos(\pi) = 0$$

$$\text{Da } B \neq 0 \text{ sein muss, bleibt nur } \cos(\pi) = 0$$

$$\text{Nullstellen v. } \cos \quad \sqrt{\lambda} \pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad | : \pi$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

$$\Rightarrow X(x) = B \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)x\right) \quad \dots \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 t}$$

Fourier Koeff. bestimmen

$$u(x,0) = x(\pi - x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\pi \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - x^2 \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) dx$$

$$= \dots$$

$$b_n = \frac{8(-\pi(2n+1)(-1)^n + 4)}{\pi(2n+1)^3}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-\pi(2n+1)(-1)^n + 4)}{\pi(2n+1)^3} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) e^{-(n+\frac{1}{2})^2 t}$$

34) $g u_{xx} = u_t$ RB $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ AB $u(x,0) = x(\pi - x)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = g \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\rightarrow T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

$$T(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\rightarrow X''(x) + \frac{\lambda}{g} X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} x\right)$$

$$X'(x) = -A \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} x\right) + B \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} x\right)$$

$$X'(0) = B \sqrt{\frac{\lambda}{g}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$-A \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} x\right) = 0$$

$$X'(\pi,t) \Rightarrow \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \pi\right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \pi = n\pi$$

$$\lambda = g n^2$$

Allgemeine Lösung: $u(x,t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) e^{-9n^2 t}$

a_0 weil auf beiden Enden isoliert ist

$$u(x,0) = x(\pi-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi-x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi-x) \cos(nx) dx$$

$$a_0 = \dots = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2(2\sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n) - \pi n)}{\pi n^3}$$

$$u(x,t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-\frac{1}{\pi n} \cdot (-1)^n - \frac{1}{\pi n})}{\pi n^3} \cos(nx) e^{-9n^2 t}$$

35)

$$u_{xx} = u_t$$

RB: $u(0,t) = -1$

$u(\pi,t) = 1$

AB: $u(x,0) = \frac{1}{2\pi} (2x - \pi)$

$u(0,t) \neq 0$ und $u(\pi,t) \neq 0$

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0$$

$$w(x) \neq 0$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0$$

$w(x)$... nur Randbed. erfüllt

$$w(0) = -1$$

$$w(\pi) = 1$$

} linearer Ansatz $w(x) = \frac{2}{\pi} x - 1$

$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ in Wärmeleitungsgleichung einsetzen.

$$u_{xx} = u_t$$

$$(v(x,t) + w(x))_{xx} = (v(x,t) + w(x))_t$$

Da $w(x)$ stationär ist ($w_t = 0$) und ($w_{xx} = 0$) weil $w(x)$ linear ist

$$\Rightarrow v_{xx} = v_t$$

-> neue Randbedingung für $v(x,t)$: $v(0,t) = 0$ $v(\pi,t) = 0$

-> Anfangsbedingung für $v(x,t)$:

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x) = \frac{1}{2\pi} (2x - \pi)$$

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x) = \frac{1}{2\pi} (2x - \pi) - \left(\frac{2}{\pi} x - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}$$

$$v(x,t) = X(x) T(t)$$

$$X''(x) T(t) = X(x) T'(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\rightarrow T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

$$T(t) = C e^{-\lambda t}$$

$$\rightarrow X'(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$RB: x=0 \quad X(0) \Rightarrow A = -1$$

$$x=\pi \quad X(\pi) = -1 \cos(\sqrt{\lambda} \pi) + B \sin(\sqrt{\lambda} \pi) = 1$$

$$\lambda = n^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

$$AB: v(x,0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi} \right) \sin(nx) dx$$

$$= \dots$$

$$= \frac{\pi n (\cos(\pi n) + 1) - 2 \sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} = \dots = \frac{(-1)^n + 1}{\pi n}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(n\pi) = 0 \\ \cos(n\pi) = (-1)^n \end{array} \right]$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n\pi} \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

$$u(x,t) = \frac{2x}{\pi} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n\pi} \sin(nx) e^{-n^2 t}$$