

36. Lösen Sie Beispiel 4 noch einmal „ohne Rechnung“ für das Innere der Kugelschale und den Bereich außerhalb, indem Sie feststellen, dass das Potential eine radiale harmonische Funktion ist. Verwenden Sie Beispiel 12, um festzustellen, dass jede radiale harmonische Funktion eine Linearkombination aus zwei Potenzen von $\|\vec{x}\|$ ist. Für das Innere der Kugel kommt nur eine der beiden Potenzen als Lösung in Frage, für das Äußere ebenso. Die Konstanten lassen sich dann leicht bestimmen.
37. Die Lösung des Eigenwertproblems für den Laplace-Operator auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ führt nach Einführung von Polarkoordinaten auf die Gleichung

$$r^2 y''(r) + 2r y'(r) + (r^2 - k(k+1))y(r) = 0$$

(siehe Vorlesung). Zeigen Sie, dass sich eine Lösung in der Form

$$y_k(r) = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k+1)!}{n!(2n+2k+2)!} r^{2n+k}$$

schreiben lässt. Zeigen Sie, dass

$$y_0(r) = \frac{\sin(r)}{r} \quad \text{bzw.} \quad y_1(r) = 3 \frac{\sin(r) - r \cos(r)}{r^2}$$

gilt.

38. Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad u(0, t) = u(4\pi, t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 0$$

und

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2\pi \leq x \leq 3\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

39. Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$4u_{xx} = u_{tt}, \quad u(0, t) = u(2\pi, t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \pi - |\pi - x|$$

und

$$u_t(x, 0) = 0.$$

$$36) f(x) = G \iiint_K \frac{P}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} dx_1 dx_2 dx_3$$

Harmonische Funktion: $\Delta f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta f(x) &= \Delta G \iiint_K \frac{P}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= G \cdot \iiint_K \Delta \frac{P}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$f(x)$ ist hängt nur von der radialen Richtung ab, da im Koordinatensystem Symmetrien herrschen.
in der radialen Richtung ändert sich $\|\vec{x}\|$

$$f(x) \rightarrow \tilde{f}(\|\vec{x}\|)$$

Aus Beispiel 12 wissen wir, dass für solch eine Funktion folgender Ansatz gewählt werden kann:

$$\Delta u = 0 = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{\|x\|} \frac{du}{dr}$$

$$u = C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{\|x\|},$$

(i) Im Inneren der Kugel:

$$\frac{1}{\|x\|} \rightarrow \infty$$

daher kommt nur C_1 in Frage

$$\Rightarrow U_{in} = C_1 = G \cdot \iiint \frac{\rho}{\|y\|} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= G \rho \cdot \iiint \frac{1}{r} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi G \rho (R_2^2 - R_1^2)$$

(ii)

Außerhalb der Kugel: $u(r \rightarrow \infty) \stackrel{!}{=} 0$ (Physik)

$$u = \frac{C_2}{r} \Rightarrow u \cdot r = C_2$$

$$u \cdot r = u \cdot \|\vec{x}\| = G \rho \iiint \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} : = G \rho \iiint 1 dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) G \rho$$

37. Die Lösung des Eigenwertproblems für den Laplace-Operator auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ führt nach Einführung von Polarkoordinaten auf die Gleichung

$$\left| r^2 y''(r) + 2r y'(r) \right| + (r^2 - k(k+1))y(r) = 0$$

(siehe Vorlesung). Zeigen Sie, dass sich eine Lösung in der Form

$$y_k(r) = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k+1)!}{n!(2n+2k+2)!} r^{2n+k}$$

schreiben lässt. Zeigen Sie, dass

$$y_0(r) = \frac{\sin(r)}{r} \quad \text{bzw.} \quad y_1(r) = 3 \frac{\sin(r) - r \cos(r)}{r^2}$$

gilt.

37 Ansatz: $y(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n+k}$

$$y'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2n+k) r^{2n+k-1}$$

$$y''(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2n+k)(2n+k-1) r^{2n+k-2}$$

→ in DGL einsetzen

$r^2 \cdot y'' \Rightarrow -2$ verschwindet aus Exponent, ebenso
 -1 bei $r \cdot y'$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2n+k)(2n+k-1) r^{2n+k} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2n+k) r^{2n+k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} ((2n+k-1)+2) a_n \cdot (2n+k) \cdot r^{2n+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2n+k+1)(2n+k) \cdot r^{2n+k}$$

$$\Rightarrow (r^2 - k(k+1)) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n+k}$$

$$\hookrightarrow = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n+k+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (k \cdot (k+1)) a_n r^{2n+k}$$

DGL:

$$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ((2n+k+1)(2n+k) - (k^2+k)) a_n \cdot r^{2n+k}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n+k+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(4n^2 + 2nk + 2n + 2nk + k^2 + k - k^2 - k)}_{=0 \text{ für } n=0} r^{2n+k} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n+k+2} = 0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} r^{2n+k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 + 4nk + 2n) r^{2n+k} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} r^{2n+k} = 0$$

$$= r^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (4n^2 + 4nk + 2n) r^{2n} + a_{n-1} r^{2n} = 0$$

$$\Rightarrow (4n^2 + 4nk + 2n) a_n + a_{n-1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{(4n^2 + 4nk + 2n)}$$

$$\text{für } n=1: a_1 = \frac{-a_0}{(6+4k)} = \frac{-a_0}{2 \cdot (3+2k)}$$

$$n=2: a_2 = - \frac{\frac{-a_0}{(6+4k)}}{4 \cdot (2k+5)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2k+3)(2k+5)}$$

$$a_3 = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2k+3)(2k+5) \underbrace{(4k+12n)}_{=6 \cdot (2k+7)}}$$

$$a_n = a_0 \cdot \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(n+k+1)!}{(2n+2k+2)!}$$

Induktion

$$\Rightarrow a_0 = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow Y_k = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k+1)!}{n! (2n+2k+2)!} r^{2n+k}$$

$$Y_0 = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n! (2n+2)!} r^{2n} \quad \nearrow = n! \cdot n+1$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)}{(2n+2)!} r^{2n} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)}{2 \cdot (n+1) (2n+1)!} r^{2n}$$

$\Rightarrow (2n+2) \cdot (2n+1)!$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} r^{2n} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} r^{2n+1}$$

Taylorreihe für $\sin(r)$

$$\Rightarrow = \frac{\sin(r)}{r}$$

$$Y_1 = \frac{4!}{2!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)!}{n!(2n+4)!} r^{2n+1} \stackrel{!}{=} 3 \frac{\sin(r) - r \cos(r)}{r^2}$$

$$= \frac{24}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{n+2} \cancel{n+1} \cancel{n!}}{\cancel{n!} \underbrace{(2n+4)}_2 \underbrace{(2n+3)}_2 \underbrace{(2n+2)}_2 (2n+1)(2n)!} \cdot r^{2n+1}$$

$$= 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2n+3)(2n+1)!} r^{2n+1}$$

$$= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(1 - \frac{2n+2}{2n+3} \right) \frac{1}{r^2} \left(r^{2n+1} - r^{2n+1} + r^{2n+3} \right)$$

$$= \frac{3}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} r^{2n+1} + \frac{3}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(-r^{2n+1} + r^{2n+3} - \frac{2n+2}{2n+3} r^{2n+1} + \frac{2n+2}{2n+3} r^{2n+1} - \frac{2n+2}{2n+3} r^{2n+3} \right)$$

$$= \frac{3}{r^2} \sin(r) + \frac{3}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(-r^{2n+1} + r^{2n+3} - \frac{2n+2}{2n+3} r^{2n+3} \right)$$

$$\therefore = \frac{3}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot r^{2n+1} \left(-1 + r^2 - r^2 \frac{2n+2}{2n+3} \right)$$

$$\hookrightarrow \therefore = -\frac{3}{r} \cos(r) \quad ; \quad \cos(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot r^{2n}$$

$$= \frac{3}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n)!} \cdot r^{2n} \left(-1 + r^2 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2n+2}{2n+3} \right)}_{= \frac{1}{2n+3}} \right)$$

$$= -\frac{3}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot r^{2n} \left[1 - 1 + \frac{1}{(2n+1)} \left(1 - \frac{r^2}{2n+3} \right) \right]$$

$$= -\frac{3}{r} \cos(r) - \frac{3}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} r^{2n} \left[-1 + \frac{1}{(2n+1)} \left(1 - \frac{r^2}{2n+3} \right) \right]$$

$$\stackrel{?}{=} 0$$

$$\rightarrow \frac{3}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} r^{2n} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \left(1 - \frac{r^2}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{3}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} r^{2n} \left[2n+1 - \left(1 - \frac{r^2}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{3}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} r^{2n} \left[2n + \frac{r^2}{2n+3} \right]$$

$$= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} r^{2n-1} \cdot \underline{2n+3} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} r^{2n+1} \frac{1}{2n+3}$$

$$\Rightarrow = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} r^{2n-1} \frac{2n}{2n+1} + \text{~~~~~}$$

0 für n=0

$$= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} r^{2n+1} \frac{2n+2}{2n+3} + \text{~~~~~}$$

$$= 3 \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{2n+3} \left(-\frac{2n+2}{2n+2} + 1 \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$$\Rightarrow = 0$$

$$\Rightarrow \chi_1 = 3 \frac{\sin(r) - r \cos(r)}{r^2}$$

Schwingungsgleichungen:

Form $\lambda^2 u_{xx} = u_{tt}$ mit RB $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Über den Separationsansatz gelangt man zur Form:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \left(\frac{L}{\lambda n \pi} \right) \sin\left(\frac{\lambda n \pi}{L} t\right) + a_n \cos\left(\frac{\lambda n \pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

Die Fourierreff. a_n und b_n hängen von den Anfangsbedingungen ab:

$$u(x,0) := a(x)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L a(x) \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx$$

$$u_t(x,0) := b(x)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L b(x) \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx$$

38. Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad u(0, t) = u(4\pi, t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 0$$

und

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2\pi \leq x \leq 3\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\lambda = 1; L = 4\pi$$

$$a_n = 0 \text{ (Anfangsbedingung)}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^{4\pi} b(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} b(x) \sin\left(\frac{n}{4}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{3\pi} 1 \cdot \sin\left(\frac{n}{4}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{4}{n} \cdot \cos\left(\frac{n}{4}x\right) \right]_{2\pi}^{3\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{n} \left[-\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right] \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{n\pi} \right)^2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{4}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$$

39. Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$4u_{xx} = u_{tt}, \quad u(0, t) = u(2\pi, t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \pi - |\pi - x|$$

und

$$u_t(x, 0) = 0.$$

$$\lambda = 2; \quad L = 2\pi$$

$$b_n = 0 \quad (AB = 0)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L a(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - |\pi - x|) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) dx$$

$\pi - |\pi - x| \Rightarrow$ Fallunterscheidung

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - \pi + x) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (\pi + \pi - x) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) dx$$

I:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin\left(\frac{n}{2}x\right) dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \cdot \frac{2}{n} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{n} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) dx$$

$$= -\frac{2}{n} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{4}{\pi n^2} \left[\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

II

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (\pi + \pi - x) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{n}{2}x\right) dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} x \sin\left(\frac{n}{2}x\right) dx$$

$$= -2 \frac{2}{n} \left[\cos\left(\frac{n}{2}x\right) \right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \frac{2}{n} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \right]_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2}{n} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) dx$$

$$= -\frac{4}{n} \left(\cancel{\cos(n\pi)} - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) + \frac{2}{n} \cdot \left(\cancel{2\cos(n\pi)} - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) - \frac{4}{n\pi} \cdot \left(\sin(n\pi) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{2}{n} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi} \left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin(n\pi) \right)$$

$$\text{I} + \text{II} = \frac{4}{\pi n^2} \left[2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin(n\pi) \right] = a_n$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\lambda n \pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \left[2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin(n\pi) \right] \cos(nt) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$