4. Berechnen Sie das elektrische Potential

$$P(\vec{y}) = G \iiint_K \frac{\rho}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

einer Kugelschale $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R_1 \leq \|\vec{x}\| \leq R_2\}$ auf einen innerhalb liegenden Punkt $\vec{y}$ (G, ρ sind Konstanten). Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

5. Gibt es zum Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y) \\ \cos(x^2+y) \end{pmatrix}$ eine Potentialfunktion?

   Berechnen Sie das Kurvenintegral über f von $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz - 3y^2 + 7xz - x^2 \\ 6z^3 - 8xy - 4x^2 \\ 8y^3 - 4xyz + 7yz \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie rot $\mathbf{V}$ und div $\mathbf{V}$.

7. Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen für das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz - \cos(x-y) + \cos(x+y) - x\sin(x+y) - \sin(x+z) \\ xz + \cos(x-y) - x\sin(x+y) \\ xy + 2z - \sin(x+z) \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\mathbf{V}$ und berechnen Sie damit das Kurvenintegral

$$\int_{(0,0,0)}^{(\pi,-\pi,2\pi)} \mathbf{V}\, d\mathbf{x}.$$

---

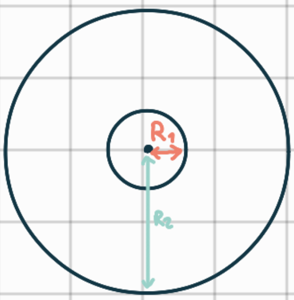
4. Berechnen Sie das elektrische Potential

$$P(\vec{y}) = G \iiint_K \frac{\rho}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

einer Kugelschale $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R_1 \leq \|\vec{x}\| \leq R_2\}$ auf einen innerhalb liegenden Punkt $\vec{y}$ (G, ρ sind Konstanten). Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

$$P(\vec{y}) = G \iiint_K \frac{\rho}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

Kugelschale: Querschnitt



Parametrisieren: Kugelkoordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi \, \sin\theta$$
$$y = r \cdot \sin\varphi \, \sin\theta$$
$$z = r \cdot \cos\theta$$

$$r = [R_1, R_2]$$
$$\varphi = [0, 2\pi]$$
$$\theta = [0, \pi]$$

$$\underbrace{\det J = r^2 \sin\theta}_{\text{Volumselement}}$$

$$\Rightarrow dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ ich kann mein Koordinatensystem beliebig wählen, daher lege ich es so, dass $\vec{y}$ mit Abstand t auf der z-Achse liegt

$$P(\vec{y}) = G \cdot \rho \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \, r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \left\| \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \, \sin\theta \\ r \cdot \sin\varphi \, \sin\theta \\ r \cdot \cos\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{(r \cos\varphi \sin\theta)^2 + (r \sin\varphi \sin\theta)^2 + (r\cos\theta - t)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 \sin^2\theta \cdot \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + r^2 \cos^2\theta - 2t \cdot r \cos\theta + t^2}$$

$$= \sqrt{r^2 \cdot \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1} - 2t \cdot r \cos\theta + t^2}$$

$$= \sqrt{r^2+t^2-2t\cdot r\cos\theta}$$

$$\hookrightarrow P(\vec{y}) = G\cdot\rho \int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2+t^2-2t\cdot r\cos\theta}}\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, dr \, d\theta$$

$$= G\cdot\rho\cdot 2\pi \int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\sqrt{r^2+t^2-2t\cdot r\cos\theta}}\, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta$$

Substitution: $s = \sqrt{r^2+t^2-2t\cdot r\cos\theta}$

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot t\cdot \sin\theta \underbrace{\left(r^2+t^2-2t\cdot r\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}}_{=\frac{1}{s}}$$

$$= G\cdot\rho\cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{\cancel{s}\cdot\cancel{r}\cdot t\cdot\cancel{\sin\theta}}\, \cancel{s}\, r^{\cancel{2}} \cancel{\sin\theta}\, ds \, dr$$

$$= G\cdot\rho\cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{t} \cdot \left[s\right]_{\theta=0}^{\pi} dr$$

$$= G\cdot\rho\cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{t} \left[\sqrt{r^2+t^2-2t\cdot r\cdot\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\pi} dr$$

$$= G\cdot\rho\cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{t} \left[\sqrt{\underbrace{r^2+t^2+2tr}_{=(r+t)^2}} - \sqrt{\underbrace{r^2+t^2-2tr}_{=(r-t)^2}}\right] dr$$

$$= G\cdot\rho\cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{t} \left[(r+t)-(r-t)\right] dr$$

$$= G \cdot \rho \cdot 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\, dr$$

$$= G \cdot \rho \cdot 2\pi \, (R_2^2 - R_1)^2 \, dr$$

$\Rightarrow$ Das Potenzial in der Kugelschale ist an jedem Ort $\vec{y}$ gleich hoch

$\rightarrow$ Das Innere der Schale ist spannungsfrei

$\rightarrow$ Faradayscher Käfig

---

5. Gibt es zum Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y) \\ \cos(x^2+y) \end{pmatrix}$ eine Potentialfunktion?

   Berechnen Sie das Kurvenintegral über f von $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y) \\ \cos(x^2+y) \end{pmatrix}$$

$\exists$ Potenzialfunktion? Notwendige Bedingung: $\frac{\partial Q}{\partial x} \overset{!}{=} \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x\sin(x^2+y) \quad \Big| \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin(x^2+y)$$

$\Rightarrow$ $\vec{V}(x,y)$ besitzt Potenzialfunktion !

$$\phi(x,y): \frac{d\phi}{dx} \overset{!}{=} P \; ; \; \frac{d\phi}{dy} \overset{!}{=} Q$$

P: $\phi_1(x,y) = \int 2x\cos(x^2+y)\, dx$

$u = x^2+y$, $\frac{du}{dx} = 2x$

$$\stackrel{!}{=} \int \cancel{2x} \cos(u) \cdot \frac{1}{\cancel{2x}} \, du$$

$$\varnothing_1(x,y) = \sin(x^2+y) + C_1(y) + K$$

Q: $\varnothing_2(x,y) = \int \cos(x^2+y) \, dy$

$s = x^2 + y \qquad \frac{ds}{dy} = 1$

$$= \int \cos u \, du$$

$$= \sin(x^2+y) + C_2(x) + K$$

C_1, C_2 bestimmen $\Rightarrow C_1 = 0; C_2 = 0$

$$\varnothing_1 \stackrel{!}{=} \varnothing_2 \Rightarrow \varnothing(x,y) = \sin(x^2+y) + K$$

$$I = \iint_a^b \vec{V}(x,y) \, dx\, dy = \varnothing(b) - \varnothing(a)$$

$$I = \sin(8) + K - [\sin(0) + K] = \sin(8)$$

---

6. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz - 3y^2 + 7xz - x^2 \\ 6z^3 - 8xy - 4x^2 \\ 8y^3 - 4xyz + 7yz \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie rot **V** und div **V**.

$$\text{rot}\,\vec{V}(x,y,z) = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \qquad V_z$$

Nabla-Operator

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24y^2 - 4xz + 7z - 18z^2 \\ xy + 7x + 4yz \\ -8y - 8x - xz + 6y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 24y^2 - 4xz + 7z - 18z^2 \\ xy + 7x + 4yz \\ -2y - 8x - xz \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = \nabla \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = yz + 7z - 2x - 8x - 4xy + 7y$$

$$= yz - 4xy - 10x + 7y + 7z$$

---

7. Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen für das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz - \cos(x-y) + \cos(x+y) - x\sin(x+y) - \sin(x+z) \\ xz + \cos(x-y) - x\sin(x+y) \\ xy + 2z - \sin(x+z) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von **V** und berechnen Sie damit das Kurvenintegral

$$\int_{(0,0,0)}^{(\pi,-\pi,2\pi)} \mathbf{V}\, d\mathbf{x}.$$

$$\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

Integrabilitätsbedingungen: $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$ oder:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \overset{!}{=} \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} \overset{!}{=} \frac{\partial R}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} \overset{!}{=} \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = z - \sin(x-y) - \sin(x+y) - x\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = z - \sin(x-y) - \left(\sin(x+y) + x\cos(x+y)\right)$$

✓

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = x \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = y - \cos(x+z)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = y - \cos(x+z)$$

✓ ✓

$\vec{V}$ besitzt ein Potenzial

$$\int P\,dx = xyz - \sin(x-y) + \cancel{\sin(x+y)} + x\cos(x+y) - \cancel{\sin(x+y)} + \cos(x+z) + C_1(y) + C_2(z) + C_3(y,z) + k$$

Nebenrechnung:

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\sin(x+y)}_{g'}\,dx = -x\cos(x+y) - \int -\cos(x+y) = -x\cos(x+y) + \sin(x+y)$$

$$\int Q\,dy = xyz - \sin(x-y) + x\cos(x+y)$$

$+ C_4(x) + C_2(z) + C_5(x,z) + K$

$$\int R\,dz = xyz + z^2 + \cos(x+z) + C_1(y) + C_4(x) + C_6(x,y) + K$$

$C_1(y) = 0$; $\underline{C_2(z) = z^2}$; $C_3(y,z) = 0$

$C_4(x) = 0$; $\underline{C_5(x,z) = \cos(x+z)}$

$C_6(x,y) = \underline{-\sin(x-y) + x\cos(x+y)}$

$\Rightarrow$ alles einsetzen

$$\emptyset = xyz + \underbrace{z^2}_{C_2} + \underbrace{\cos(x+z)}_{C_5} \underbrace{- \sin(x-y) + x\cos(x+y)}_{C_6} + K$$

$$\int_{(0,0,0)}^{\pi,-\pi,2\pi} \vec{V}\,d\vec{x} = \emptyset(\pi,-\pi,2\pi) - \emptyset(0,0,0)$$

$$= -2\pi^3 + 4\pi^2 - 1 - 0 + \pi + K$$

$$-(0 + 0 + 1 - 0 + 0 + K)$$

$$= -2\pi^3 + 4\pi^2 + \pi - 2$$