8. Angabe

$I_8 = \oint_C (x^2-y^2)dx + (x+y)dy \quad ; C := \partial B = \partial\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 ; a=2, b=1\}$

Integralsatz von Gauß (GIS) → siehe Mathematik C Satz 6.2

... einfach ausgedrückt für 2D: $\oint_{\partial B} \vec{V} d\vec{o} = \iint_B div(\vec{V}) dA$

$d\vec{o} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad \vec{n} \hat{=}$ Vektor normal zur Kurve

8.1 Lösung des Kurvenintegrals von I_8

- Ellipse zum Kreis!

$x = au \longrightarrow dx = a\,du$

$y = bv \longrightarrow dy = b\,dv$

$C' := \{(u,v)\in\mathbb{R} \mid u^2+v^2=1\}$

$$I_8 = \oint_{C'} a\cdot[(au)^2-(bv)^2]\,du + b(au+bv)dv$$

- Parametrisierung in Polarkoordinaten des Einheitskreises ($r=1$)

$u = \cos\varphi \longrightarrow du = -\sin\varphi$

$v = \sin\varphi \longrightarrow dv = \cos\varphi$

$C'' := \{\varphi\in\mathbb{R} \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

$$I_8 = \oint_{C''} a[(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)](-\sin\varphi)d\varphi + b[a\cos\varphi + b\sin\varphi]\cos\varphi\, d\varphi$$

... Nutzung des Distributivgesetzes

$$I_8 = \underbrace{-a^3\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi}_{0} + \underbrace{ab^2\int_0^{2\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi}_{0} + \underbrace{ab\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi}_{ab\pi} + \underbrace{b^2\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}_{0} \quad [\text{vgl. } \underline{A.1} \,\&\, \underline{A.2}]$$

$I_8 = ab\pi = \underline{2\pi}$

8.2 Lösung des Kurvenintegrals als Flächenintegral mittels GIS

GIS für $B \subset \mathbb{R}^2$: $\oint_{\partial B} \vec{V} d\vec{\sigma} = \iint_B div(\vec{V}) dA \stackrel{?}{=} I_{8,1}$

$\vec{V} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x + y \end{pmatrix}$; $div(\vec{V}) = \nabla \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x + y \end{pmatrix} = 2x + 1$

$I_{8,2} = \iint_B (2x+1) \, dx \, dy$

- Fläche B parametrisieren

$B := \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1 ; a = 2, b = 1 \}$

$\left.\begin{matrix} x = au \\ y = bv \end{matrix}\right\} |J_{f,BB'}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = \underline{ab}$

$B' := \{ (u,v) \in \mathbb{R} \mid u^2 + v^2 \leq 1 \}$

$I_{8,2} = ab \iint_{B'} (2au + 1) \, du \, dv$

$\left.\begin{matrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{matrix}\right\} |J_{f,B'B''}| = \underline{r}$

$B'' := \{ (r,\varphi) \in \mathbb{R} \mid r \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi] \}$

$I_{8,2} = abr \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2ar\cos\varphi + 1) \, dr \, d\varphi = abr \int_{r=0}^{1} 2\pi r = abr^2 \pi \Big|_{r=0}^{1} = ab\pi = \underline{2\pi}$

$I_{8,2} = I_{8,1}$ ✓

9. Angabe

$$\oint_C \overbrace{(x^2-y^3+z^2)}^{P}dx + \overbrace{(xy-z^2)}^{Q}dy + \overbrace{2xz}^{R}\,dz = \oint_C \vec{V}\,\underbrace{d\vec{s}}_{\text{infinitisimales Wegstück}} = I_9$$

$$C: \underbrace{[(x-y)^2+z^2=2]}_{C_1} \cap \underbrace{[x+y+z=0]}_{C_2}$$

9.1 Parametrisieren

$$C_2: x+y+z=0 \rightarrow -z=x+y$$

$$C_1: (x-y)^2+z^2=2 \rightarrow (x-y)^2+(-x-y)^2=2 \rightarrow x^2+y^2=1$$

- C umformulieren zu C'

$$C := \{(x,y,z)\in\mathbb{R} \mid x^2+y^2=\overset{r}{1},\ z=-x-y\} \rightarrow C' := \{\varphi\in\mathbb{R} \mid 0\le\varphi\le 2\pi\}$$

- $d\vec{s}$ parametrisieren für C'

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\cos\varphi-\sin\varphi \end{pmatrix} \rightarrow d\vec{s} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi-\cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

9.2 Kurvenintegral lösen

$$I_9 = \int_0^{2\pi} \Big[\big[\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + (\cos\varphi+\sin\varphi)^2\big](-\sin\varphi) + \big(\cos\varphi\sin\varphi - (\cos\varphi+\sin\varphi)^2\big)\cos\varphi - 2\cos\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big]\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \big[-\sin\varphi\cos^3\varphi + \sin^4\varphi - \sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)^3 + \cos^2\varphi\sin\varphi - 2\cos\varphi[\sin^2\varphi-\cos^2\varphi]\big]\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \big[\sin^4\varphi + \cos^3\varphi - 3\cos^2\varphi\sin\varphi - 5\cos\varphi\sin^2\varphi - \sin^3\varphi\big]\,d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi}_{\frac{3\pi}{4}} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi}_{0} - 3\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi}_{0} - 5\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi}_{0} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi}_{0} \quad [\text{vgl. A.184.2}]$$

$$\underline{I_9 = \frac{3\pi}{4}}$$

10. Angabe

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2xy + z \\ y^2 \\ -x-3y \end{pmatrix} \qquad S: \underbrace{2x+2y+z=6}_{S_1} \;;\; \underbrace{x, y, z \geq 0}_{S_2}$$

gesucht: $\Phi = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA$

10.1 Fläche umformulieren (auf x & y reduzieren)

$S_1: 2x+2y+z=6 \rightarrow \underline{z = f(x,y) = 6-2x-2y}$

$S_2: z \geq 0 \rightarrow f(x,y) \geq 0 \rightarrow 0 \leq 6-2x-2y \rightarrow \underbrace{x+y \leq 3}$

$S' = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x+y \leq 3 : x,y \geq 0\}$ $\qquad \boxed{y \leq 3-x}$

10.2 Normalvektor $\vec{n}$ ermitteln

Mathematik C Seite 71, 72 ; $\vec{n} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = 6-2x-2y \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -\partial f/\partial x \\ -\partial f/\partial y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

10.3 Integral lösen

$$\Phi = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x} \begin{pmatrix} 2xy + \overbrace{6-2x-2y}^{z} \\ y^2 \\ -x-3y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x} \underbrace{(4xy + 12 - 5x - 7y + 2y^2)}_{2y^2 + y(4x-7) - 5x + 12} dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{3} \left[\frac{2}{3}[3-x]^3 + \frac{1}{2}(3-x)^2(4x-7) - 5x(3-x)^2 + 12(3-x) \right.$$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}\int_{x=0}^{3}(3-x)^3\,dx}_{\frac{27}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x=0}^{3}(3-x)^2(4x-7)\,dx}_{-18} \underbrace{- 5\int_{x=0}^{3}x(3-x)^2\,dx}_{-\frac{45}{2}} + \underbrace{12\int_{x=0}^{3} 3-x\,dx}_{54}$$

$$= \frac{27-36-45+108}{2} = \underline{27}$$

11. Angabe

$$\underbrace{\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\overbrace{\oiint_{\|\vec{y}-\vec{x}\|=r} f(\vec{y})\, do(\vec{y})}^{I_{11}} - f(\vec{x})\right)}_{A} \overset{?}{=} \frac{1}{6}\Delta f(\vec{x})$$

Anm. $\Delta f(\vec{x}) = \nabla^T \nabla f(\vec{x}) = (\partial/\partial x \;\; \partial/\partial y \;\; \partial/\partial z)\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix} \cdot f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}\partial^2/\partial x^2\\ \partial^2/\partial y^2\\ \partial^2/\partial z^2\end{pmatrix} f(\vec{x}) = f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$

11.1 lt. Hinweis: Taylorreihenentwicklung von $f(\vec{y})$ um $\vec{x}$

$$f(\vec{y}): \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ \vec{y} \to f \end{cases} ; U \subset \mathbb{R}^3$$

$$Tf(\vec{x};\vec{y}) = f(\vec{y}) \approx \underbrace{\sum_{i=2}^{2} \frac{f^{(i)}(\vec{x})}{i!}(\vec{y}-\vec{x})^i}_{T_2 f(\vec{x};\vec{y})} = f(\vec{x}) + \langle \nabla f(\vec{x}), \vec{y}-\vec{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle (\vec{y}-\vec{x})^T, H_f(\vec{x})(\vec{y}-\vec{x})\rangle$$

11.2 $T_2 f(\vec{x};\vec{y}) \approx f(\vec{y})$ in I_{11} einsetzen

$$I_{11} = \oiint_{\|\vec{y}-\vec{x}\|=r} f(\vec{x}) + \langle \nabla f(\vec{x}), (\vec{y}-\vec{x})\rangle + \frac{1}{2}\langle (\vec{y}-\vec{x})^T, H_f(\vec{y}-\vec{x})\rangle \, do(\vec{y})$$

$$\boxed{\vec{y}-\vec{x} = \vec{r}} = \begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta\\ r\sin\varphi\sin\theta\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\oiint_{\|\vec{r}\|=r} f(\vec{x})\, do(\vec{y})}_{I_{11,1}} + \underbrace{\oiint_{\|\vec{r}\|=r} \langle \nabla f(\vec{x}), (\vec{y}-\vec{x})\rangle\, do(\vec{y})}_{I_{11,2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\oiint_{\|\vec{r}\|=r} \langle (\vec{y}-\vec{x})^T, H_f(\vec{y}-\vec{x})\rangle\, do(\vec{y})}_{I_{11,3}}$$

11.3 Integrale lösen

Oberflächenintegral einer Sphäre

$$I_{11} = f(\vec{x}) \cdot \oiint_{\|\vec{r}\|=r} do(\vec{y}) = f(\vec{x}) \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\varphi\, d\theta = \underline{4\pi r^2 f(\vec{x})}$$

$$I_{11,1} = \oiint_{\|\vec{r}\|=r} \begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\ \partial f/\partial y\\ \partial f/\partial z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix} do(\vec{y}) = \oiint_{\|\vec{r}\|=r} f_x r_1 + f_y r_2 + f_z r_3 \, do(\vec{y})$$

$$= \oiint_{\|\vec{r}\|=r} [f_x(\vec{x}) r\cos\varphi\sin\theta + f_y(\vec{x}) r\sin\varphi\sin\theta + f_z(\vec{x}) r\cos\theta]\, \underline{r^2\sin\theta}\, d\varphi\, d\theta$$

$$= r^3\Big[f_x(\vec{x}) \underbrace{\int\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi\sin^2\theta\, d\varphi\, d\theta}_{0} + f_y(\vec{x}) \underbrace{\int\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\varphi\sin\theta^2\, d\varphi\, d\theta}_{0} + f_z(\vec{x}) \underbrace{\int\int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{0}\Big] = 0 \quad [\text{vgl. } \underline{A.1} \,\&\, \underline{A.2}]$$

$$I_{11,3} = \frac{1}{2} \oint\!\!\oint_{\|\vec{r}\|=r} \underbrace{\langle (\vec{r})^T, \langle H_f(f(\vec{x})), \vec{r} \rangle\rangle}_{B} \, d\sigma(\vec{y})$$

11.3.1 Ausdruck B lösen

Hessematrix: $H_f(f(\vec{x})) = \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1..n} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$ (denn $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ wegen stetiger Differenzierbarkeit)

$$\langle H_f(f(\vec{x})), \vec{r} \rangle = [\because] \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 f_{xx} + r_2 f_{xy} + r_3 f_{xz} \\ r_1 f_{xy} + r_2 f_{yy} + r_3 f_{zy} \\ r_1 f_{xz} + r_2 f_{zy} + r_3 f_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\langle\langle H_f(f(\vec{x})), \vec{r} \rangle, \vec{r} \rangle = (\vdots) \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = r_1^2 f_{xx} + 2r_1 r_2 f_{xy} + 2r_1 r_3 f_{xz} + r_2^2 f_{yy} + 2r_2 r_3 f_{zy} + r_3^2 f_{zz}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \sin\theta \\ r\sin\varphi \sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

11.3.2 $I_{11,3}$ integrieren

$$I_{11,3} = \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r_1^2 f_{xx}\, d\varphi\, d\theta}_{I_{11,3,1}} + \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r_2^2 f_{yy}\, d\varphi\, d\theta}_{I_{11,3,2}} + \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r_3^2 f_{zz}\, d\varphi\, d\theta}_{I_{11,3,3}} + \underbrace{2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r_1 r_2 f_{xy}\, d\varphi\, d\theta}_{0} + \underbrace{2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r_1 r_3 f_{xz}\, d\varphi\, d\theta}_{0} + \underbrace{2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r_2 r_3 f_{zy}\, d\varphi\, d\theta}_{0} \Bigg]$$

$$I_{11,3,1} = f_{xx} r^4 \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^3\theta \, d\varphi\, d\theta = \frac{f_{xx} r^4}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} \underbrace{\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}}_{2\pi} \cdot \sin^3\theta \, d\theta = f_{xx} r^4 \pi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta}_{\frac{4}{3}} = \boxed{\frac{4 f_{xx} r^4 \pi}{3}}$$

$$I_{11,3,2} = f_{yy} r^4 \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2\varphi \sin^3\theta \, d\varphi\, d\theta = \boxed{\frac{4 f_{yy} r^4 \pi}{3}}$$

$$I_{11,3,3} = f_{zz} r^4 \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\varphi\, d\theta = \boxed{\frac{4 f_{zz} r^4 \pi}{3}}$$

> Anmerkung: Produkte von trigonometrischen Funktionen über Euler-Identität zu Summen bilden und dann integrieren ... siehe A.1

11.4 In Ausdruck A der Angabe einsetzen

$$A = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\left[4\pi r^2 f(\vec{x}) + 0 + \frac{4\pi r^4}{6} \underbrace{\left(f_{xx}(\vec{x}) + f_{yy}(\vec{x}) + f_{zz}(\vec{x})\right)}_{\Delta f(\vec{x})} \right] - f(\vec{x}) \right)$$

$$\overset{!}{=} \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left[f(\vec{x}) - f(\vec{x}) + \frac{1}{6} r^2 \Delta f(\vec{x}) \right]$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{6} \Delta f(\vec{x}) \quad \checkmark$$

A Spickzettel: Trigonometrie

A.1 Trigonometrische Funktionen

Produkt	Komplexe Darstellung	Summe
$\cos(x)$	$\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$	
$\sin(x)$	$\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$	
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2)$	$\underline{\frac{1}{2}(1 + \cos(2x))}$
$\sin^2(x)$	$-\frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2)$	$\underline{\frac{1}{2}(1 - \cos(2x))}$
$\sin(x)\cos(x)$	$\frac{1}{4i}(e^{2ix} - e^{-2ix})$	$\underline{\frac{1}{2}(\sin(2x))}$
$\sin(x)\cos^2(x)$	$\frac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{-3ix} + e^{ix} - e^{-ix})$	$\underline{\frac{1}{4}(\sin(3x) + \sin(x))}$
$\sin(x)^2\cos(x)$	$-\frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} - e^{ix} - e^{-ix})$	$\underline{\frac{1}{4}(\cos(x) - \cos(3x))}$
$\cos^3(x)$	$\frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix})$	$\underline{\frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))}$
$\sin^3(x)$	$\frac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{-3ix} + 3e^{ix} - 3e^{-ix})$	$\underline{\frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin(x))}$

A.2 Diverse Integrale von trigonometrischen Funktionen

		$f(x)$								
	φ	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos^2(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin(x)\cos(x)$	$\sin(x)\cos^2(x)$	$\sin(x)^2\cos(x)$	$\cos^3(x)$	$\sin^3(x)$
$\int_0^\varphi f(x)dx$	$\pi/2$	1	1	$\pi/4$	$\pi/4$	1/2	1/3	1/3	2/3	2/3
	π	0	2	$\pi/4$	$\pi/2$	0	2/3	0	0	4/3
	2π	0	0	π	π	0	0	0	0	0