

16. Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei feste Punkte auf der Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$. Berechnen Sie das (skalare) Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathbb{S}^2} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle d\sigma(\vec{z}).$$

17. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y^2 \\ x - z^2 \end{pmatrix}$$

und die Fläche F mit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$$

18. Weisen Sie den Integralsatz von Stokes für das Kurvenintegral

$$\oint_C xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz$$

nach, wobei C die Berandung der Fläche

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

bezeichnet.

19. Sei P_n der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n in den Variablen x, y, z . Bestimmen Sie Basen der Räume

$$H_n = \{p \in P_n \mid \Delta p = 0\}$$

für $n = 1, 2, 3$. (Hinweis: der Raum H_n hat Dimension $2n + 1$).

$$16) \quad S^2 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1 \}$$

$$\oint_{S^2} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \, d\sigma(\vec{y})$$

Kugelkoordinaten Subs.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 1$$

$$r = 1$$

$$\xrightarrow{\text{einsetzen}} \vec{z} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$d\sigma = r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (x_1 r \cos \varphi \sin \theta + x_2 r \sin \varphi \sin \theta + x_3 r \cos \theta) (y_1 r \cos \varphi \sin \theta + y_2 r \sin \varphi \sin \theta + y_3 r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$$

alle lineare Winkelfunktion über $0, 2\pi$ werden zu 0 und es bleiben folgende Terme:

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} x_1 y_1 \cos^2 \varphi \sin^3 \theta + x_2 y_2 \sin^2 \varphi \sin^3 \theta + x_3 y_3 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} x_1 y_1 \sin^3 \theta + x_2 y_2 \sin^3 \theta + 2 x_3 y_3 (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$\text{NR: } \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \pi x_1 y_1 + \frac{4}{3} \pi x_2 y_2 + 2\pi x_3 y_3 \left(2 - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3} \pi \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

17)

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y^2 \\ x-z^2 \end{pmatrix}$$

Fläche $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 1 \}$

Satz von Stokes $= \oint_{K=\partial F} \vec{v} \, d\vec{s} = \iint_F \operatorname{rot}(\vec{v}) \, d\vec{o}$

parametrisieren ∂F ist ein Kreis in der Ebene $z=1$:

$$K(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$K'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\oint_K \vec{v} \, d\vec{s} = \oint_K \vec{v} \cdot K'(t) \, dt = \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin^2 t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_{t=0}^{2\pi} (\cos t + \sin t) \cdot (-\sin t) + \sin^2 t \cdot \cos t \, dt = \dots = -\pi$$

$$\iint_F \operatorname{rot}(\vec{v}) \, d\vec{o}$$

$$r \in [0, 1] \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \quad r^2 \leq 1 \Rightarrow r \leq 1$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Fläche ist durch $x^2 + y^2 = z$ begrenzt auf $z \leq 1$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = F_x \times F_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iint_F (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_F \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} d\sigma = \iint_F 2y - 1 \, dx \, dy$$

in polar umwandeln

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$d\sigma = r \, dr \, d\varphi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (2r \sin \varphi - 1) r \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 2r^2 \sin \varphi - r \, dr \, d\varphi$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left. \frac{2}{3} r^3 \sin \varphi - \frac{r^2}{2} \right|_0^1 d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \overset{\text{über } 2\pi = 0}{\parallel} \frac{2}{3} \sin \varphi - \frac{1}{2} d\varphi = - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi$$

$$- \left(\frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\pi$$

Man erhält beide teile von Integrall von Stokes das gleiche Ergebniss $-\pi$ □

$$18) \oint xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz$$

$$O = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1 \}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

parametrisierung:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iint_O \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_O \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dx \, dy = \int_{y=-1}^1 \int_{x=-1}^1 (2xy - 2y(x^2 - y^2) - x) \, dx \, dy$$

$$\int_{y=-1}^1 \left(x^2 y - \frac{2}{3} x^3 y + 2y^3 x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 dy = \int_{-1}^1 \left(4y^3 - \frac{4}{3} y \right) dy = \left(y^4 - \frac{2}{3} y^2 \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$\cancel{y - \frac{2}{3} y + 2y^3 - \frac{1}{2}} - \cancel{\left(y + \frac{2}{3} y - 2y^3 - \frac{1}{2} \right)}$$

$$4y^3 - \frac{4}{3} y$$

$$= 0$$

$$\oint_{K=\partial D} \vec{F} d\vec{S}$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix}$$

$$K'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -2 \cos t \sin t - 2 \cos t \sin t \\ \quad \quad \quad = -4 \cos t \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_K \vec{v} d\vec{S} = \oint_K \vec{v} K'(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \cdot \sin t \\ \sin t \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) \\ \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -4 \cos t \sin t \end{pmatrix} dt$$

$$= \dots = 0$$

Es kommen Winkelfunktionen vor
 $\rightarrow$ über 2π integriert ergibt 0

$$19) H_n = \{ p \in P_n \mid \Delta p = 0 \}$$

Finde Basen für der Räume H_n sodass gilt $\Delta p = 0$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

1. Für $n=1$

Homogene Polynome vom Grad 1 sind lineare Polynome in x, y, z , haben die Form:

$$p = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$$

$$\Delta p = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z)$$

$$\Delta p = 0 \quad \leftarrow \text{zweite Ableitung aller linearen Kombination ist 0}$$

$$\text{Basis für } H_1 = \{x, y, z\} \leftarrow \dim 3 \rightarrow 2n+1 = 3$$

2. Für $n=2$

Homogene Polynome Grad 2 sind quadratisch und haben die allgemeine Form:

$$p = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + f yz$$

$$\Delta p = 2a + 2b + 2c = 0$$

$$\rightarrow a + b + c \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{eine Basis für } H_2 \text{ ist } \{x^2 - y^2, x^2 - z^2, xy, xz, yz\} \leftarrow \dim 5 \rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

3. Für $n=3$

Homogene Polynome grad 3 haben die Form

$$p = ax^3 + by^3 + cz^3 + dxy^2 + exz^2 + f yz^2 + g xyz + hx^2y + ix^2z + jy^2x + ky^2z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (ax^3) = 6ax$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (by^3) = 6by$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (cz^3) = 6cz$$

die anderen terme werden sowieso zu 0

$$\rightarrow 6a + 6b + 6c \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow a + b + c = 0$$

Basis für H_3 :

$$\{x^3 - 3xy^2, x^3 - 3xz^2, y^3 - 3yx^2, y^3 - 3yz^2, z^3 - 3zx^2, z^3 - 3zy^2, xyz\}$$

Kontrolle ob: $\Delta (x^3 - 3xy^2) \stackrel{?}{=} 0$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow 6x - 6x$$

Diese Polynome sind linear unabhängig und erfüllen Laplace Gleichung

Die Dimension für diesen Raum = 7 welches mit der Formel $2 \cdot n + 1 = 7$ zusammen passt.