

Mathematik C (EEE) Skriptum

Univ.-Prof. Dr. Peter Grabner¹

15. Oktober 2025

¹Dieses Skriptum wurde nach einer Mitschrift der Vorlesung im WS 2024/25 von Dinara Khakimova und Florian Hirsch verfasst.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoranalysis	3
1.1	Vektorfeld	3
1.2	Kurvenintegrale	4
1.3	Wegunabhängigkeit	6
1.3.1	Satz von Gauß-Green	10
1.4	Integralsätze in der Ebene	16
1.5	Oberflächenintegrale	19
1.5.1	Wedge-Produkte und Parametrisierung	22
1.6	Integralsätze im Raum	26
1.6.1	Der Integralsatz von Gauß im Raum	26
1.6.2	Folgerungen aus dem Integralsatz von Gauß	30
1.6.3	Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen	32
1.6.4	Der Integralsatz von Stokes im Raum	34
1.6.5	Interpretation des Integralsatzes von Stokes	36
1.A	Zusammenfassung des Kapitels: Vektoranalysis	37
2	Hilbert-Räume	41
2.1	Alternativer Zugang zu den Fourier-Reihen	43
2.2	Verallgemeinerung	45
3	Partielle Differentialgleichungen	47
3.1	Die Lösung der Potentialgleichung in \mathbb{R}^2	47
3.1.1	Der Trennungsansatz	48

3.1.2	Poissonsche Integralformel	53
3.1.3	Alternative Herleitung der Formel	54
3.2	Die Lösung der Potentialgleichung in \mathbb{R}^3	59
3.2.1	Poissonsche Integralformel	59
3.2.2	Legendre-Polynome	61
3.2.3	Kugelflächenfunktionen	63
3.2.4	Abschluss	71
3.3	Wärmeleitungsgleichung	71
3.4	Herleitung der Wärmeleitungsgleichung	72
3.4.1	Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung	73
3.4.2	Rechenschema der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung	73
3.4.3	Zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung	84
3.4.4	Dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung auf der Kugel	91
3.5	Die eindimensionale Wellengleichung	92
4	Die Herleitung der Maxwell-Gleichungen	99
4.1	Vorbemerkungen	99
4.2	Maxwell 1	101
4.3	Maxwell 2	101
4.4	Maxwell 3	102
4.5	Maxwell 4	103
4.6	Spezialfälle	106
A	Formelsammlungen	108
A.1	1. Teilklausur	109
A.2	2. Teilklausur	113

Kapitel 1

Vektoranalysis

1.1 Vektorfeld

Definition 1. Eine Abbildung $(V) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $(V) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt (zwei- bzw. dreidimensionales) **Vektorfeld**.

Wir schreiben für die Koordinaten

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

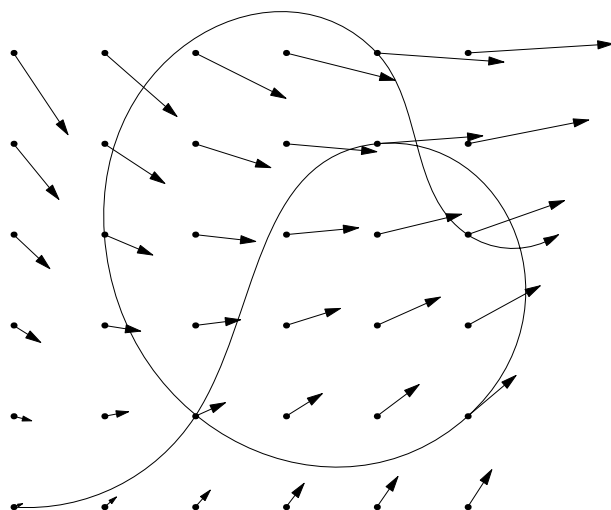


Abbildung 1.1: Vektorfeld

Beispiele: Strömungsfeld, Gravitationsfeld, elektrisches Feld.

1.2 Kurvenintegrale

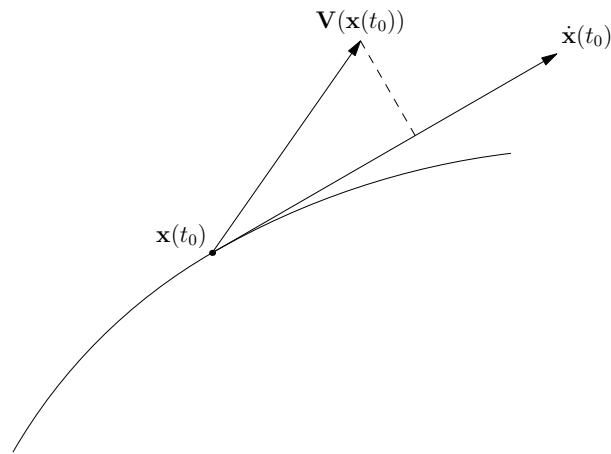


Abbildung 1.2: Arbeit entlang einer Kurve im Vektorfeld

Sei $x(t)$ eine Kurve (Bewegung im Vektorfeld). Gesucht wird die Arbeit, die bei Bewegung entlang der Kurve im Feld verrichtet wird. Es gilt:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft (in Wegrichtung)} \times \text{Weg}.$$

$$\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0) \approx \dot{\mathbf{x}}(t_0)h$$

Die Arbeit entlang der Kurve zwischen $\mathbf{x}(t_0)$ und $\mathbf{x}(t_0 + h)$ ist daher etwa

$$\|V(\mathbf{x}(t_0))\| \cdot \|h\dot{\mathbf{x}}(t_0)\| \cos(\alpha) = \langle V(\mathbf{x}(t_0)), h\dot{\mathbf{x}}(t_0) \rangle = h \langle V(\mathbf{x}(t_0)), \dot{\mathbf{x}}(t_0) \rangle$$

Diskrete Annäherung der Arbeit

Im Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$ wird die Arbeit als Skalarprodukt von Kraft \mathbf{V} und Weg \mathbf{x} definiert:

$$[t_k, t_{k+1}] \rightarrow \langle \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k), \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_k)) \rangle$$

Um den Anteil der Kraft in Wegrichtung zu erhalten, multiplizieren wir den Kraftvektor mit dem normierten Wegvektor:

$$\left\langle \frac{\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)}{\|\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)\|}, \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_k)) \right\rangle \cdot \|\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)\|$$

Durch eine Taylor-Entwicklung des Weges um t_k erhalten wir:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_k) + (t - t_k) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t_k) + \mathcal{O}((t - t_k)^2)$$

Daher kann die Arbeit im Intervall weiter vereinfacht werden:

$$[t_k, t_{k+1}] \rightarrow \langle \mathbf{x}(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t_k) + \mathcal{O}((t_{k+1} - t_k)^2), \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_k)) \rangle$$

Die gesamte Arbeit entlang einer Kurve wird durch die Summe der Beiträge in den Intervallen beschrieben:

$$\sum \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_k)), \dot{\mathbf{x}}(t_k) \rangle (t_k - t_{k-1})$$

Indem wir nun die Zerlegungen immer weiter verfeinern erhalten wir im Grenzübergang das Integral:

$$\int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt$$

als Arbeit im Kraftfeld \mathbf{V} entlang der durch $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ gegebenen Kurve.

Unabhängigkeit von der Parametrisierung

Das Linienintegral eines Vektorfeldes entlang einer Kurve $\mathbf{x}(t)$ ist gegeben durch:

$$\int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt$$

Für eine Neuparametrisierung $t \mapsto u$ mit $\mathbf{y}(u) = \mathbf{x}(t(u))$ ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{y}}(u) = \dot{\mathbf{x}}(t(u)) \cdot \dot{t}(u)$$

Daher transformiert sich das Integral zu:

$$\int_c^d \langle \mathbf{V}(\mathbf{y}(u)), \dot{\mathbf{y}}(u) \rangle du = \int_c^d \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t(u)), \dot{\mathbf{x}}(t(u))) \rangle \dot{t}(u) du$$

Bemerkung 1. Der Wert des Integrals

$$\int_a^b \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt$$

hängt **nicht** von der Parametrisierung der Kurve ab:

$$\dot{\mathbf{x}} dt = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Das Kurvenintegral hängt nur vom Vektorfeld \mathbf{V} , von der Kurve C und ihrer Orientierung ab.

Schreibweise für das Kurvenintegral

Das Integral eines Vektorfeldes $\mathbf{V} = (P, Q)$ entlang einer Kurve C wird geschrieben als:

$$\int_C \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \int_C \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_C P dx + Q dy$$

bzw. analog im dreidimensionalen Fall

$$\int_C \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

Beispiel 1. Kurvenintegral entlang eines Kreisbogens Betrachte die Kurve C , den Viertelkreis im ersten Quadranten des Einheitskreises:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0\}$$

Parametrisierung:

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Differentiale:

$$dx = -\sin(t) dt, \quad dy = \cos(t) dt$$

Das Integral berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_C (-y dx + x dy) &= \int_0^{\pi/2} [-\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t) \cos(t)] dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung 2. Der entscheidende Teil bei der Berechnung von Kurvenintegralen ist die Auswahl einer passende Parametrisierung.

1.3 Wegunabhängigkeit

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, unter welchen Bedingungen die Arbeit im Kraftfeld nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt. Diese Frage ist naheliegend, weil einige der in der Natur auftretenden Felder, etwa das Gravitationsfeld und das elektrische Feld, diese Eigenschaft haben.

Definition 2. Ein Kurvenintegral

$$\int_C \mathbf{V} d\mathbf{x}$$

heißt **wegunabhängig**, wenn sein Wert nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve C , aber nicht vom Verlauf der Kurve abhängt. Ein Vektorfeld, für das das zugehörige Kurvenintegral wegunabhängig ist, heißt **konservativ**.

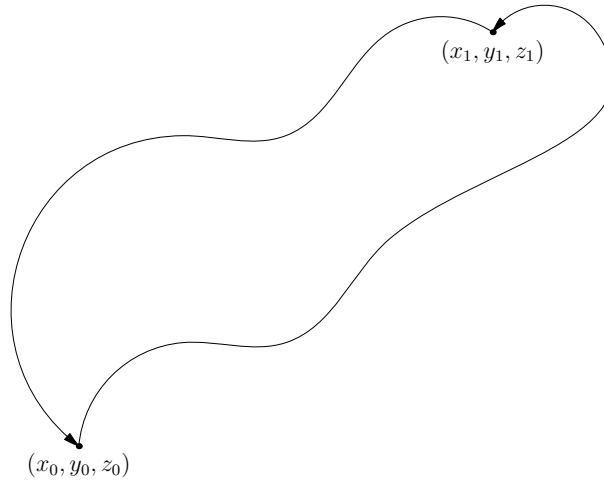


Abbildung 1.3: Wegunabhängigkeit

Es gilt also für beliebige Wege C_1, C_2 von Anfangspunkt nach Endpunkt

$$\int_{C_1} = \int_{C_2}$$

Folgerung. Daraus ergibt sich als Folgerung, dass bei Wegunabhängigkeit das Integral entlang einer geschlossenen Kurve Null ist. Für $C = C_1 - C_2$ (das negative Vorzeichen steht hier wegen der Orientierung der Kurven) ist also

$$\int_C = \int_{C_1} - \int_{C_2} = 0.$$

Bemerkung 3. Bei Wegunabhängigkeit wird entlang geschlossener Wege keine Arbeit verrichtet.

Integrale entlang geschlossener Wege heißen *Ringintegrale*. Diese werden als

$$\int_C = \oint_C = \oint$$

geschrieben.

Wir wollen nun eine weitere äquivalente Formulierung für die Wegunabhängigkeit finden. Dazu betrachten wir für ein konservatives Vektorfeld \mathbf{V} und einen festen Punkt \mathbf{x}_0 im Definitionsbereich die Funktion

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x},$$

wobei das Integral über irgendeinen Weg, der Anfangs- und Endpunkt verbindet, zu erstrecken ist. Wegen der Wegunabhängigkeit ist diese Definition zulässig.

Für diese Funktion φ gilt dann

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{V},$$

das Vektorfeld \mathbf{V} ist also ein **Gradientenfeld**. Die Funktion φ heißt dann **Stammfunktion** oder **Potential** des Vektorfeldes.

Sei nun umgekehrt \mathbf{V} ein Gradientenfeld, also $\mathbf{V} = \nabla\varphi$. Dann ist

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = d\varphi,$$

also ein totales Differential. Damit ergibt sich für eine Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ($t \in [a, b]$)

$$\int \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi(\mathbf{x}(t))) dt = \int_{\mathbf{x}(a)}^{\mathbf{x}(b)} d\varphi = \varphi(\mathbf{x}(t)) \Big|_a^b = \varphi(\mathbf{x}(b)) - \varphi(\mathbf{x}(a)),$$

das Integral hängt also nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

Bemerkung 4. Ein Vektorfeld \mathbf{V} ist genau dann konservativ, wenn es ein Gradientenfeld ist, wenn es also eine Funktion φ gibt, sodass $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ gilt.

Wir brauchen also nur noch eine leicht überprüfbare Bedingung, die sicherstellt, dass \mathbf{V} ein Gradientenfeld ist. Dazu nehmen wir an, dass

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

gilt. Im ersten Fall erhalten wir dann

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

bzw. im zweiten Fall

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die sogenannten Integrabilitätsbedingungen für zwei- bzw. dreidimensionale Vektorfelder gefunden.

Bemerkung 5. Ein konservatives Vektorfeld erfüllt in zwei Dimensionen die Bedingungen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

ein konservatives Vektorfeld erfüllt in drei Dimensionen die Bedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y}.\end{aligned}$$

Diese können auch kurz als

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

geschrieben werden.

Beispiele für Gradientenfelder in drei Dimensionen:

- **Gravitationsfeld:**

$$\mathbf{V} = -\frac{GM}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x} \quad \text{mit Potential} \quad \varphi = -\frac{GM}{\|\mathbf{x}\|}$$

- **Elektrisches Feld:**

$$\mathbf{V} = -\nabla \varphi \quad \text{mit} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{x}\|}$$

Beispiel 2. Wir berechnen nun das Kurvenintegral

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Durch Einsetzen der Parametrisierung $x = R \cos(t)$, $y = R \sin(t)$ erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{-R \sin(t)(-R \sin(t)) + R \cos(t)R \cos(t)}{R^2} dt = 2\pi.$$

Andererseits gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Das Vektorfeld erfüllt also die Integrabilitätsbedingung, aber das Integral über die geschlossene Kurve verschwindet nicht.

Bemerkung 6. Das Beispiel zeigt, dass die von uns gefundenen Integrabilitätsbedingungen zwar notwendig aber nicht hinreichend für die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals sind.

1.3.1 Satz von Gauß-Green

Definition 3. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte $x, y \in M$ durch eine stetige Kurve verbinden lassen, die ganz in M liegt.

Definition 4. Ein *Gebiet* ist eine offene, nicht leere und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Ein Gebiet B heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sein Rand ∂B zusammenhängend ist. Einfach zusammenhängende Gebiete sind dadurch charakterisiert, dass jede einfach geschlossene Kurve C in diesem Gebiet der Rand eines Teilgebiets ist.

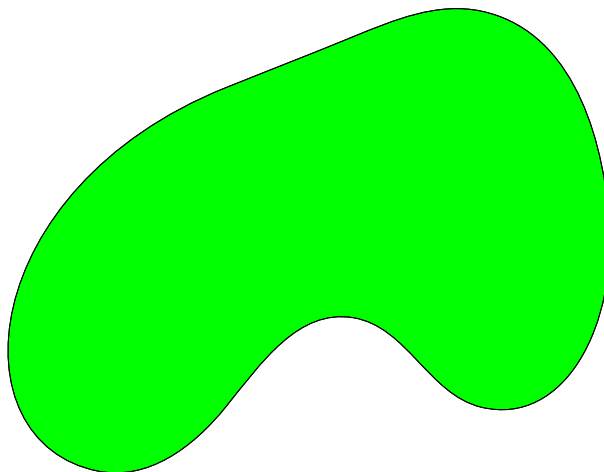


Abbildung 1.4: Einfach zusammenhängendes Gebiet.

Anschaulich gesprochen ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet ein „Gebiet ohne Löcher“.

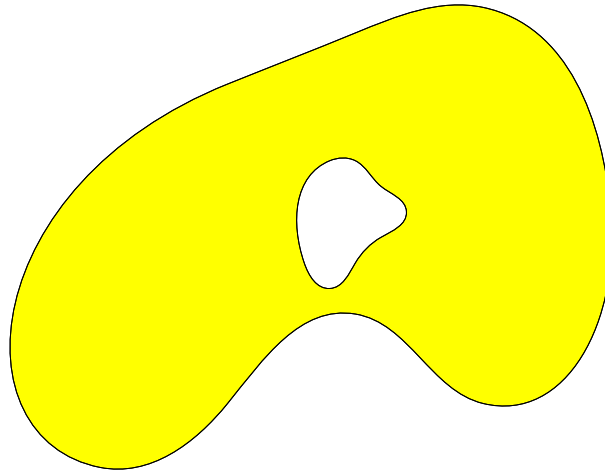


Abbildung 1.5: Nicht einfach zusammenhängendes Gebiet.

Bemerkung 7. Die Orientierung des Randes wird so gewählt, dass der nach außen zeigende Normalvektor \mathbf{n} und der Tangentenvektor \mathbf{t} ein **Rechtssystem** (\mathbf{n}, \mathbf{t}) bilden.

Definition 5. Ein *Normalbereich* B_y bezüglich der y -Achse ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 , für die es Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und Funktionen $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$B_y = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

(Für festes x entspricht der Bereich also genau der Strecke $g(x) \leq y \leq h(x)$.)

Analog definiere einen Normalbereich B_x bezüglich der x -Achse als

$$B_x = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Einen Normalbereich kann man sich folgendermaßen vorstellen: „Sticht“ man in einen Normalbereich B_y bezüglich der y -Achse in y -Richtung, verlässt man B_y ein einziges Mal und betritt es nie wieder (ebenso B_x in x -Richtung).

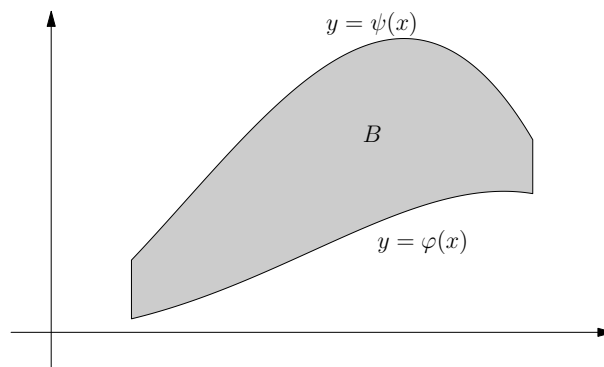


Abbildung 1.6: Ein Normalbereich

Satz 1 (Gauß-Green). Sei B ein zweidimensionaler Normalbereich bezüglich beider Achsen und $C = \partial B$ sein Rand. Sei weiters $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld. Dann gilt

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Beweis. Wir betrachten ein Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$, das bezüglich **beider Achsen** ein **Normalbereich** ist. Sein Rand sei

$$C = \partial B \quad (\text{Rand von } B).$$

Dies bedeutet, dass B sich sowohl in x - als auch in y -Richtung in einfacher Weise durch Funktionsgraphen beschreiben lässt. Genauer:

$$\begin{aligned} B &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\}. \end{aligned}$$

Damit ist der Rand ∂B (also C) genau aus den Graphen der Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$ und $\psi_2(y)$ zusammengesetzt.

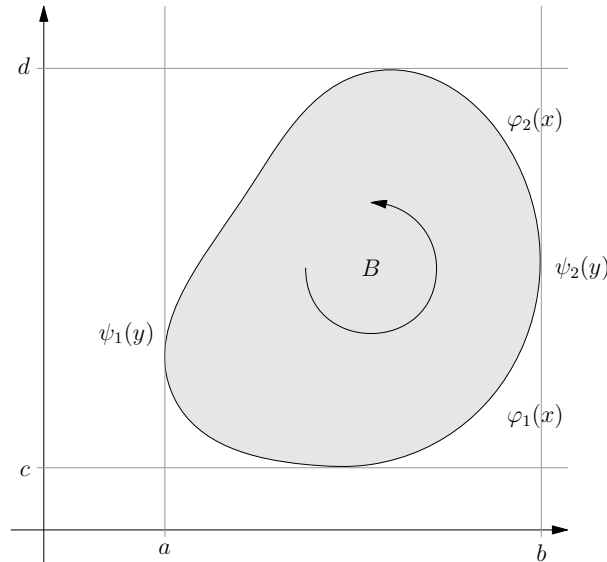


Abbildung 1.7: Ein Normalbereich bezüglich beider Achsen

Wir wollen das Kurvenintegral über den Rand C berechnen. Dafür parametrisieren wir C durch die vier Funktionsgraphen und berücksichtigen dabei die jeweilige Orientierung. Außerdem spalten wir das Kurvenintegral in zwei Teile

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_C P dx + \oint_C Q dy.$$

Das erste Integral können wir als

$$\oint_C P dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx$$

schreiben; das negative Vorzeichen kommt dabei von der umgekehrten Durchlaufungsrichtung des oberen Teils der Randkurve.

Ebenso können wir das zweite Integral als

$$\oint_C Q dy = - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy + \int_a^b Q(\varphi_2(y), y) dy$$

schreiben.

Beide Integrale können wir jetzt unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung umformen:

$$\begin{aligned} \oint_C P dx &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ \oint_C Q dy &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy, \end{aligned}$$

woraus sich insgesamt die Gleichung

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

ergibt. □

Mithilfe des Satzes von Gauß-Green gelingt es uns nun, den genauen Zusammenhang zwischen der Integrabilitätsbedingung und der Wegunabhängigkeit herzustellen: wenn der Definitionsbereich $U \subseteq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, dann sind die Wegunabhängigkeit und die Integrabilitätsbedingung äquivalent.

Bestimmung einer Stammfunktion im \mathbb{R}^2

Wir wollen für konservative Vektorfelder $\mathbf{V} = (P, Q)$ eine Methode zur Bestimmung der Stammfunktion finden. Dazu nehmen wir

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

an.

Dazu gehen wir in zwei Schritten vor. Zuerst bestimmen wir die Stammfunktion φ bis auf eine nur von y abhängige Funktion, indem wir die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ nach x integrieren:

$$\varphi(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y).$$

Die noch unbekannte Funktion $C(y)$ bestimmen wir nun, indem wir diese Gleichung nach y differenzieren

$$Q(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx + C'(y).$$

Wegen der Integrabilitätsbedingung stimmt das Integral auf der rechten Seite bis auf eine nur von y abhängige Funktion mit Q überein. Diese Funktion $C'(y)$ kann aus dieser Gleichung bestimmt werden. Durch Integration erhalten wir daraus $C(y)$.

Beispiel 3. Bestimmung einer Stammfunktion

Gegeben sei das Vektorfeld:

$$\int_C (e^y - ye^{-x} + 1) dx + (xe^y + e^{-x} - 1) dy$$

$$P = e^y - ye^{-x} + 1, \quad Q = xe^y + e^{-x} - 1.$$

Wir überprüfen die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y - e^{-x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y - e^{-x}.$$

Da die Bedingung erfüllt ist, existiert eine Stammfunktion $\varphi(x, y)$. Bestimmung durch Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= P \Rightarrow \varphi(x, y) = xe^y + e^{-x} + C(y). \\ \frac{d\varphi}{dy} &= xe^y + e^{-x} + C'(y) = xe^y + e^{-x} - 1 \end{aligned}$$

Bestimmung von $C(y)$ durch:

$$\frac{d}{dy}C(y) = -1 \Rightarrow C(y) = -y + D.$$

Damit ergibt sich die Stammfunktion/Potentialfunktion :

$$\varphi(x, y) = xe^y + ye^{-x} + x - y + D.$$

Bestimmung einer Stammfunktion im \mathbb{R}^3

Wie im letzten Abschnitt wollen wir für ein konservatives Vektorfeld $\mathbf{V} = (P, Q, R)$ eine Stammfunktion bestimmen. Dazu nehmen wir an, dass die Integrabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y}\end{aligned}$$

erfüllt sind. Die zugehörige Stammfunktion φ muss dann die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= P(x, y, z) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= Q(x, y, z) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= R(x, y, z)\end{aligned}$$

erfüllen.

Indem wir die erste Gleichung nach x integrieren, erhalten wir

$$\varphi(x, y, z) = \int P(x, y, z) dx + C(y, z)$$

mit einer von y und z abhängigen unbekannten Funktion C . Diese Gleichung differenzieren wir nun nach y und erhalten

$$Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial C}{\partial y}.$$

Aus dieser Gleichung können wir (wegen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$) $\frac{\partial C}{\partial y}$ bestimmen, woraus sich durch Integration nach y $C(y, z)$ bis auf eine nur von z abhängige Funktion bestimmen lässt. Diese bestimmen wir, indem wir die erhaltene Gleichung für φ , die diese noch unbekannte Funktion enthält, nach z differenzieren und mit der Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R$ vergleichen.

Beispiel 4. Gegeben ist das Kurvenintegral:

$$\oint y(z+1) dx + x(z+1) dy + (xy+1) dz$$

1. Integrabilitätsbedingung Die partiellen Ableitungen überprüfen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= z+1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = z+1 \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= x = \frac{\partial R}{\partial y} = x\end{aligned}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = y = \frac{\partial P}{\partial z} = y$$

Da alle Bedingungen erfüllt sind, **existiert eine Potentialfunktion** $\varphi(x, y, z)$.

2. Bestimmung der Potentialfunktion $\varphi(x, y, z)$ Zunächst integrieren wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y(z + 1)$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = xy(z + 1) + C(y, z)$$

Nun bestimmen wir $C(y, z)$ aus:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x(z + 1) + \frac{\partial C}{\partial y} = x(z + 1)$$

Da $\frac{\partial C}{\partial y} = 0$, folgt:

$$C = D(z)$$

Schließlich bestimmen wir $D(z)$ aus:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy + D'(z) = xy + 1$$

$$D'(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad D(z) = z$$

Damit ergibt sich:

$$\varphi(x, y, z) = xyz + xy + z$$

Wir können leicht die Probe machen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz + x \frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy + 1.$$

1.4 Integralsätze in der Ebene

Interpretation des Integralsatzes von Gauß–Green

Der Satz von Gauß–Green verknüpft ein **Linienintegral** am Rand einer Fläche mit einem **Flächenintegral** über das Innere. Wir wollen für den Ausdruck $-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}$ eine Interpretation finden. Dazu betrachten wir den Integralsatz für einen kleinen Kreis um einen Punkt (x_0, y_0) und führen einen Differentiationsprozess aus.

Betrachten wir zuerst das Kurvenintegral

$$\oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} P dx + Q dy.$$

Nach Definition integrieren wir dabei den Anteil des Vektorfeldes \mathbf{V} , der in Tangentialrichtung der Kreisbewegung zeigt. Wir messen also, welcher Anteil des Vektorfeldes mit der Kreisbewegung „mitrotiert“. Klarerweise wird das Integral immer kleiner, wenn $r \rightarrow 0$ geht. Um einen sinnvollen Grenzübergang ausführen zu können, müssen wir also noch geeignet normieren.

Die rechte Seite des Integralsatzes ist dann

$$\iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy.$$

Diesem Ausdruck sehen wir an, dass er von der Größenordnung der Fläche ist. Dies gibt uns die oben erwähnte Normierung.

Wir berechnen

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Andererseits erhalten wir aus der linken Seite des Integralsatzes

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} P dx + Q dy = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun als Wirbeldichte des Vektorfeldes interpretieren: wir beziehen den Anteil des Vektorfeldes, der mit der Kreisbewegung „mitrotiert“, auf die Fläche und machen diese immer kleiner.

Bemerkung 8. Da wir diese Idee der „Gebietsdifferentiation“ noch mehrfach verwenden wollen, halten wir die Grundidee noch einmal kurz fest. Sei $f(x, y)$ eine stetige skalare Funktion. Für einen Kreis mit Radius r um (x_0, y_0) lautet ein analoges Resultat:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0).$$

Man kann dies als eine Art **Mittelwert-Eigenschaft** interpretieren: Je kleiner der Kreis um (x_0, y_0) wird, desto mehr nähert sich der Flächenmittelwert von f dem Funktionswert an diesem Punkt.

Fluss eines Vektorfeldes in \mathbb{R}^2

Betrachten wir ein Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$ mit stetig differenzierbarem Rand ∂B . Zur Parametrisierung des Randes definieren wir eine geschlossene Kurve $\mathbf{x}(t)$, $t \in [a, b]$, mit

$$\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b), \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Dann ist $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ der zugehörige **Tangentialvektor**.

Normalenvektor

Der in \mathbb{R}^2 übliche **Normalenvektor** (der von innen nach außen zeigt) ist dann durch

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Sei $\mathbf{V} = (P, Q)$ ein Vektorfeld. Wir wollen jetzt den Anteil des Vektorfeldes \mathbf{V} bestimmen, der in Normalenrichtung auf den Rand der Fläche zeigt, also den **Fluss** von \mathbf{V} durch den Rand ∂B .

Mit denselben Überlegungen wie bei der Definition des Kurvenintegrals ergibt sich dann

$$\int_{\partial B} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{n}(t) dt$$

Setzt man $\mathbf{n}(t)$ wie oben ein, so ergibt sich

$$\int_a^b \mathbf{V}(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b [P \dot{y}(t) - Q \dot{x}(t)] dt$$

In Differentialform (wenn man $dx = \dot{x}(t) dt$ und $dy = \dot{y}(t) dt$ setzt) passt man die Terme an und erhält den bekannten **Linienintegral-Ausdruck**:

$$\int_{\partial B} -Q dx + P dy$$

Nach dem **Satz von Gauß–Green** gilt

$$\int_{\partial B} (-Q dx + P dy) = \iint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

Die linke Seite ist also nach unseren Überlegungen der **Fluss** von \mathbf{V} durch den Rand von B .

Um die rechte Seite zu interpretieren, führen wir wieder die Gebietsdifferentiation durch:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Andererseits gilt auch

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r} (-Q dx + P dy) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0),$$

also der Fluss von \mathbf{V} durch den Rand des Kreises bezogen auf die Kreisfläche. Damit können wir $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$ als „Quelldichte“ von \mathbf{V} interpretieren.

1.5 Oberflächenintegrale

Definition eines Vektorfeldes in \mathbb{R}^3

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\mathbf{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, das heißt,

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Parametrisierung einer Fläche

Wir betrachten eine (orientierte) Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, die durch eine Abbildung

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird. Das Parametergebiet sei eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$.

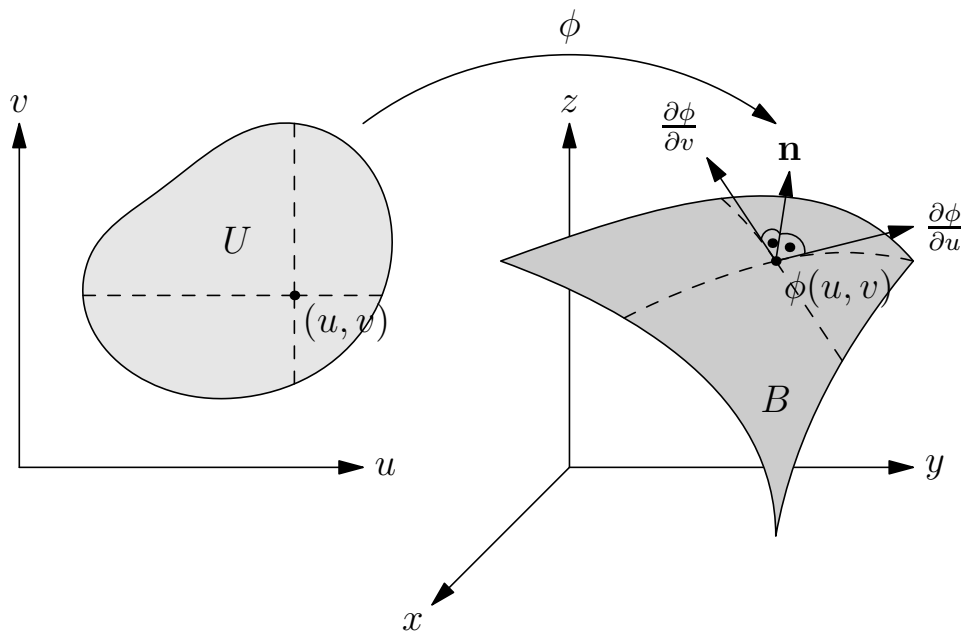


Abbildung 1.8: Parametrisierung einer Fläche im \mathbb{R}^3

Normalenvektor und infinitesimales Flächenelement

Die **Tangentialvektoren** der Fläche sind

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v).$$

Ein dazu senkrechter **Normalenvektor** (orientiert) entsteht über das **Kreuzprodukt**:

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v).$$

Bemerkung 9. Wir schreiben durchgehend \mathbf{N} für den mit einer Länge (nämlich dem Flächenelement) behafteten Normalvektor und $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}$ für den normierten Normalvektor.

Somit erhält man das **infinitesimale Flächenelement** (manchmal geschrieben als vektorielle Größe)

$$d\mathbf{o} = \mathbf{N}(u, v) du dv = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv = \mathbf{n} d\sigma.$$

Der Betrag $\|\mathbf{n}(u, v)\|$ entspricht der **Flächenverzerrung** bei der Abbildung aus dem (u, v) -Parameterbereich in \mathbb{R}^3 . Entsprechend bezeichnet man $d\sigma = \|\mathbf{N}(u, v)\| du dv$ als das **skalare** Flächenelement.

Diskrete Approximation (Riemann-Summe)

Um den Fluss des Vektorfeldes durch die Fläche zu ermitteln, kann man den Parameterbereich B in kleine Rechtecke $\Delta u_i \times \Delta v_j$ aufteilen und an den (u_i, v_j) -Gitterpunkten das Vektorfeld sowie das **diskrete Normalenstück** approximieren.

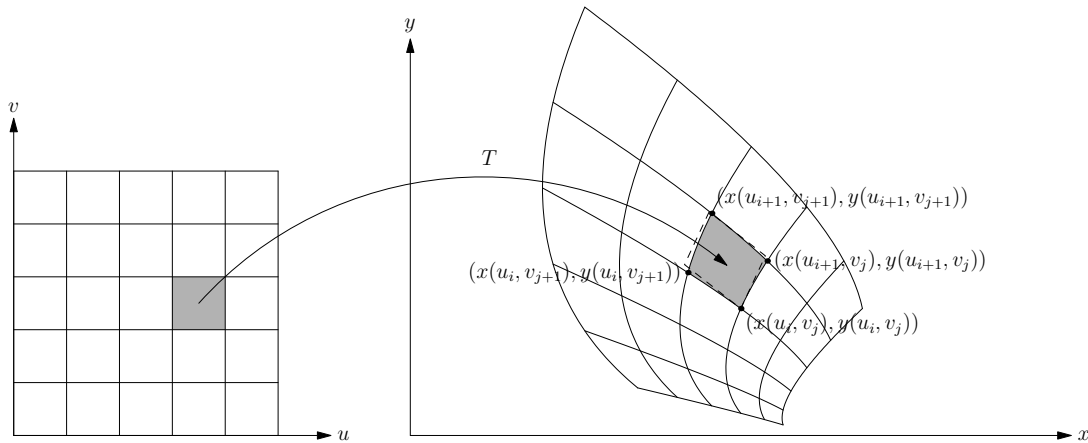


Abbildung 1.9: Darstellung einer Riemann-Summen-Approximation des Flusses über die Fläche

Eine Summierung ergibt dann:

$$\sum_{i,j} \left\langle \mathbf{n}(u_i, v_j), \mathbf{V}(\mathbf{x}(u_i, v_j)) \right\rangle \Delta u_i \Delta v_j,$$

wobei $\mathbf{n}(u_i, v_j) \approx \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$. Dies führt im Grenzübergang ($\Delta u_i, \Delta v_j \rightarrow 0$) auf das **Oberflächenintegral**.

$$\text{Fluss von } \mathbf{V} \text{ durch } F : \sum_i \sum_j \left\langle \mathbf{n}(u_i, v_j), \mathbf{V}(\mathbf{x}(u_i, v_j)) \right\rangle \Delta u_i \Delta v_j$$

Fluss durch die Fläche

Der **Fluss** von \mathbf{V} durch F ist definiert als

$$\iint_F \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \iint_B \left\langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(u, v)), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle du dv.$$

Man schreibt dafür auch:

$$\iint_F \langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \rangle d\mathbf{o} \quad \text{oder} \quad \iint_F \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o},$$

wobei das Flächenelement definiert ist als:

$$d\mathbf{o} = \mathbf{n} d\mathbf{o} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv$$

$$d\mathbf{o} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv$$

Hier ist \mathbf{n} der Normalenvektor und $d\mathbf{o}$ das skalare Flächenelement.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} \\ &\approx \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| (u_{i+1} - u_i) (v_{j+1} - v_j) \end{aligned}$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} \text{Fluss} &= \sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_i, v_j), \mathbf{V}(\mathbf{x}(u_i, v_j)) \right\rangle \cdot \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|} \\ &\quad \times \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| (u_{i+1} - u_i) (v_{j+1} - v_j) \end{aligned}$$

Indem wir die Zerlegung immer weiter verfeinern, erhalten wir im Grenzübergang

$$\iint_B \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \mathbf{V}(\mathbf{x}(u, v)) \right\rangle du dv$$

Bemerkung 10. Dieses Integral ist **unabhängig** von der konkreten Parametrisierung der Fläche, solange die Orientierung (Richtung der Normalen) konsistent beibehalten wird.

- $d\mathbf{o} = \mathbf{n} do = \mathbf{N} du dv = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} du dv$ (Vektorielle Form des Oberflächenelements)
- $do = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| du dv$ (Skalare Form)
- $\iint_F \mathbf{V} d\mathbf{o} = \iint_B \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}(u, v)), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \rangle du dv.$

1.5.1 Wedge-Produkte und Parametrisierung

Definition 6. Das Wedge-Produkt (auch äußeres Produkt genannt) ist eine Operation, die in der linearen Algebra (als äußere Algebra) und in der Differentialgeometrie (bei Differentialformen) verwendet wird. Es ermöglicht, aus „niedrigdimensionalen Bausteinen“ (z.B. Vektoren oder 1-Formen) höherdimensionale Objekte (z.B. orientierte Flächen- oder Volumenelemente) zu konstruieren.

Wir betrachten ein Vektorfeld $\mathbf{V} = (P, Q, R)$ in \mathbb{R}^3 . Ein vektorielles Flächenelement $d\mathbf{o}$ (oft auch $d\mathbf{F}$ oder $\mathbf{n} dA$) kann man in der Differentialformen-Sprache als

$$d\mathbf{o} = \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{pmatrix}$$

Damit schreibt sich das Oberflächenintegral von \mathbf{V} über eine Fläche F als

$$\iint_F \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \iint_F P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

Eigenschaften des Wedge-Produkts

Bemerkung 11. • $dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$

- $dx \wedge dx = 0$ (allgemein jede Form „wedged“ mit sich selbst ist Null).
- $dx \wedge dy \neq 0$, sondern entspricht dem infinitesimalen Flächenstück in der (x, y) -Ebene, mit Orientierung.

Wir verwenden das \wedge -Produkt hauptsächlich als Schreibweise, weil es erlaubt Oberflächenintegrale ohne Vektor-Notation zu schreiben. Die Integralsätze lassen sich dann in sehr kompakter Form schreiben, es nehmen nämlich alle die einheitliche Form

$$\oint \partial B \omega = \int_B d\omega$$

an.

Parametrisierung $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

Um eine Fläche in \mathbb{R}^3 zu beschreiben, wähle man eine Abbildung

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

wobei (u, v) im Parametergebiet $B \subset \mathbb{R}^2$ liegt. Dann gelten z.B.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Beispiel 5. Wir betrachten:

$$dy \wedge dz = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right).$$

Wir bestimmen $dy \wedge dz$ nach den Rechenregeln.

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}; \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv;$$

$$dy \wedge dz = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} du \wedge du + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} du \wedge dv + \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} dv \wedge du + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} dv \wedge dv \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du \wedge dv.$$

Setzen wir diese Ergebnisse in das Integral ein:

$$\iint_B P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \iint_B P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy \\ &= \iint_V \left(P(\varphi(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + Q(\varphi(u, v)) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right. \\ & \quad \left. + R(\varphi(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right) du \wedge dv \end{aligned}$$

Wenn sichergestellt ist, dass die richtige Orientierung gewählt wurde (Normalvektor!), darf am Ende $du \wedge dv$ durch $du \, dv$ ersetzt werden. Damit sind wir bei einem gewöhnlichen Doppelintegral angelangt, das wir ausrechnen können.

Beispiel 6. Oberflächenintegral auf der oberen Halbkugel

$$\iint_F \left(y \, dy \wedge dz + z \, dz \wedge dx + x \, dx \wedge dy \right),$$

wobei

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \right\}$$

die obere Halbkugel des Einheitsradius ist.

1. Parametrisierung der Halbkugel

Wir wählen Kugelkoordinaten mit Radius $r = 1$, Azimutwinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ und Polarwinkel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Damit definieren wir:

$$x = \cos(\varphi) \sin(\theta), \quad y = \sin(\varphi) \sin(\theta), \quad z = \cos(\theta).$$

Hierdurch wird die obere Halbkugel (inkl. Randkreis im (x, y) -Plane bei $z = 0$) vollständig beschrieben.

2. Berechnung der Tangentialvektoren

Zur Parametrisierung $\mathbf{x}(\varphi, \theta)$ betrachten wir:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

3. Normalenvektor als Kreuzprodukt

Das vektorielle Flächenelement ergibt sich aus

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}.$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Für das Kreuzprodukt ergibt sich nun unter mehrmaliger Anwendung von $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = -\sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt aber offenbar ins Innere der Kugel. Das korrekte vektorielle Flächenelement lautet also (nach Vorzeichenwechsel)

$$d\mathbf{o} = \sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta d\varphi.$$

4. Berechnung des Integrals

Wir setzen nun den gewonnenen Ausdruck für $d\mathbf{o}$ in das Integral

$$\begin{aligned} \iint_F y \, dy \wedge dz + z \, dz \wedge dx + x \, dx \wedge dy &= \iint_F \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} d\mathbf{o} \\ &= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhalten wir

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\theta)^3 + (\sin(\phi) + \cos(\phi)) \sin(\theta)^2 \cos(\theta) \right) d\theta d\phi.$$

Die dabei auftretenden Integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi, \quad \int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi$$

verschwinden. Daher ergibt sich schließlich der Wert 0 für das gesuchte Oberflächenintegral.

1.6 Integralsätze im Raum

Wenn ∂B eine **geschlossene Fläche** bezeichnet (etwa eine Kugeloberfläche), so wählt man für das Oberflächenintegral stets die **nach außen gerichtete** Normalenrichtung. Das **Flussintegral** (bzw. Oberflächenintegral) von \mathbf{V} über ∂B schreibt sich als

$$\oiint_{\partial B} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o},$$

wobei $d\mathbf{o} = \mathbf{n} d\sigma$ das orientierte Flächenelement ist (\mathbf{n} = nach außen weisender Normalenvektor).

1.6.1 Der Integralsatz von Gauß im Raum

Satz 2. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\mathbf{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein **stetig differenzierbares** Vektorfeld. Ist $B \subset U$ eine kompakte Teilmenge mit **stückweise differenzierbarem** Rand ∂B , dann gilt

$$\oiint_{\partial B} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \iiint_B \operatorname{div}(\mathbf{V}) dx dy dz.$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{div} \mathbf{V}$ die **Divergenz** des Feldes \mathbf{V} ist (auch als $\nabla \cdot \mathbf{V}$ bezeichnet). Man kann $\operatorname{div} \mathbf{V}$ dabei als **Quelldichte** des Feldes interpretieren, denn das Oberflächenintegral misst den **Gesamtfluss** durch den Rand.

Beweis. Für die Herleitung des Satzes verwenden wir wieder die Idee der Gebietsdifferenziation. Wir betrachten als B die Kugel vom Radius r um \mathbf{x}_0 . Ihr Volumen ist dann $\frac{4}{3}\pi r^3$. Wir erwarten die Gültigkeit einer Gleichheit der Form („der Fluss durch den Rand muss gleich dem Integral über die Quelldichte sein“)

$$\oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \iiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} \text{Quelldichte} dx dy dz.$$

Um die Quelldichte zu bestimmen, führen wir den Grenzübergang $r \rightarrow 0$ nach Normierung mit dem Volumen der Kugel durch

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \text{Quelldichte}.$$

Für die Kugel mit Radius r um \mathbf{x}_0 ergibt sich für den normierten Normalvektor im Punkt \mathbf{x}

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{r}$$

und damit für das vektorielle Oberflächenelement

$$d\mathbf{o} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{r} do.$$

Damit können wir das Oberflächenintegral über die Kugeloberfläche als

$$\oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{r} do$$

schreiben.

Die Funktion $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (P, Q, R)$ wird um den Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ bis zur ersten Ordnung entwickelt:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P(\mathbf{x}_0) + \frac{dP}{dx}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + \frac{dP}{dy}(\mathbf{x}_0)(y - y_0) + \frac{dP}{dz}(\mathbf{x}_0)(z - z_0) + \text{Fehler} \\ Q(\mathbf{x}_0) + \frac{dQ}{dx}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + \frac{dQ}{dy}(\mathbf{x}_0)(y - y_0) + \frac{dQ}{dz}(\mathbf{x}_0)(z - z_0) + \text{Fehler} \\ R(\mathbf{x}_0) + \frac{dR}{dx}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + \frac{dR}{dy}(\mathbf{x}_0)(y - y_0) + \frac{dR}{dz}(\mathbf{x}_0)(z - z_0) + \text{Fehler} \end{pmatrix}$$

Dabei ist der Fehler jeweils so klein, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Fehler}}{r} = 0$$

gilt.

Indem wir nun die erste Näherung für \mathbf{V} in das Integral einsetzen und das Skalarprodukt auswerten, erhalten wir Integrale der Form

$$\oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} (x - x_0) do(\mathbf{x}) = 0$$

$$\oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} (x - x_0)(y - y_0) do(\mathbf{x}) = 0,$$

die meisten der auftretenden Integrale verschwinden also. Die einzigen verbleibenden sind die Integrale

$$\oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} (x - x_0)^2 do(\mathbf{x}) = \oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} (y - y_0)^2 do(\mathbf{x}) = \oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} (z - z_0)^2 do(\mathbf{x}).$$

Diese drei Integrale summieren sich zu

$$\oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} r^2 d\sigma(\mathbf{x}) = 4\pi r^4,$$

woraus sich

$$\oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} (x-x_0)^2 d\sigma(\mathbf{x}) = \frac{4\pi r^4}{3}$$

ergibt.

Wir haben also

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4\pi r^3} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{r} d\sigma \\ &= \frac{3}{4\pi r^3} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{(x-x_0)^2}{r} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{(y-y_0)^2}{r} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{(z-z_0)^2}{r} + \text{Fehler} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Indem wir nun den Grenzübergang $r \rightarrow 0$ durchführen, dabei die Größenordnung des Fehlers und den Wert der drei auftretenden Integrale berücksichtigen, erhalten wir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{r} d\sigma = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} =: \operatorname{div} \mathbf{V}$$

für die Quelldichte und damit den behaupteten Satz. □

Bemerkung 12. Zusammenhang mit Differentialformen

$$\iint_{\partial B} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Dies ist die **2-Form** des Vektorfeldes $\mathbf{V} = (P, Q, R)$ auf dem Rand ∂B .

Erinnerung 1. Eine beliebige Funktion $f(x, y, z)$ hat das **totale Differential**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Für eine 2-Form $P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ betrachtet man das äußere Differential

$$d(P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy).$$

Wir definieren das Differential einer 2-Form als

$$d(P dy \wedge dz) := dP \wedge dy \wedge dz, \quad dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz,$$

und analog für Q und R .

Beispiel 7. Rechnung Schritt für Schritt (mit Wedge-Produkten)

$$\begin{aligned} d(P dy \wedge dz) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz. \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Da $dy \wedge dy = 0$ und $dz \wedge dz = 0$, reduziert sich dies zu

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Analog verfahren wir für die Terme mit Q und R ; wir erhalten (bei sorgfältigem Sortieren der Vorzeichen) genau den kombinierten Ausdruck, aus der $\operatorname{div}(\mathbf{V}) dx \wedge dy \wedge dz$ hervorgeht.

Endergebnis: Die äußere Ableitung des 2-Form-Ausdrucks $P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ liefert die 3-Form $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$. Dies ist das **Differentialformen**-Pendant zur Gleichung

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Bemerkung 13. Die totale Ableitung einer Funktion $f(x, y, z)$ ist gegeben durch:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Die äußere Ableitung der Differentialform $Pdx + Qdy + Rdz$ berechnet sich als:

$$d(Pdx + Qdy + Rdz) := dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$$

Einsetzen der Ableitungen:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz$$

Anwenden der äußeren Multiplikation:

$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dx \wedge dz \\ &\quad + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz \\ &\quad - \frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \end{aligned}$$

Neu gruppieren:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Die Terme in Klammern entsprechen den Komponenten der Rotation:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

1.6.2 Folgerungen aus dem Integralsatz von Gauß

Der **Integralsatz von Gauß** ermöglicht es, ein Oberflächenintegral über den Rand des Volumens in ein Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes umzuwandeln. Diese Methode ist besonders nützlich für verschiedene Anwendungen in der Physik und Mathematik, insbesondere für die Berechnung von Flüssen durch geschlossene Flächen.

Als Vorbereitung auf Kapitel 3 wollen wir eine Integralformel herleiten. Dazu wenden wir

den Integralsatz von Gauß auf das Vektorfeld $f \operatorname{grad}(g)$ an

$$\iint_{\partial B} f \cdot \operatorname{grad}(g) d\mathbf{o} = \iiint_B \operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad}(g)) dx dy dz.$$

Durch Anwendung der Produktregel für Divergenzen ergibt sich:

$$= \iiint_B (\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle + f \Delta g) dx dy dz$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator ist.

Indem wir die Rollen von f und g vertauschen und beiden Ausdrücke subtrahieren, erhalten wir die Formel von Green:

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \operatorname{grad}(g) - g \cdot \operatorname{grad}(f)) d\mathbf{o} = \iiint_B (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz \quad (1.1)$$

Falls \mathbf{n} der nach außen gerichtete Normalenvektor auf ∂B ist, gilt

$$(\nabla g) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}, \quad \text{so dass} \quad \iint_{\partial B} f \nabla g \cdot d\mathbf{o} = \iint_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{o}.$$

Eine **alternative Schreibweise** für die oben genannte Formel unter Verwendung der normalen Ableitung ist:

$$\iint_{\partial B} \left(f \frac{dg}{d\mathbf{n}} - g \frac{df}{d\mathbf{n}} \right) d\mathbf{o} = \iiint_B (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz$$

Diese Formel wird besonders häufig für Anwendungen mit harmonischen Funktionen ($\Delta f = 0$) verwendet.

Beispiel 8. Anwendung auf eine harmonische Funktion

Die Funktion $g(x)$ heißt die fundamentale Lösung der Laplace-Gleichung:

$$g(x) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

In kartesischen Koordinaten ist dies gegeben durch:

$$g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

Der Gradient dieser Funktion ist:

$$\text{grad}(g) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3}$$

Ableitungen

Nun berechnen wir die zweiten Ableitungen der Funktion $g(x)$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} &= \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} + (x - x_0) \left(-\frac{3}{2} \frac{2(x - x_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \right) \\ &= \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 - 3(x - x_0)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \end{aligned}$$

Für die weiteren Ableitungen ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} &= \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 - 3(y - y_0)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} &= \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 - 3(z - z_0)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Setzen wir die Berechnungen zusammen, erhalten wir

$$\Delta g = -\frac{3\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 - 3((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} = 0$$

1.6.3 Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen

Wir wollen nun eine wichtige Eigenschaft von harmonischen Funktionen, also Funktionen, die der Potentialgleichung $\Delta f = 0$ genügen, herleiten.

Dazu betrachten wir man eine Kugelschale

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq R\}.$$

mit innerem und äußerem Radius r bzw. R und wenden die Formel von Gauß-Green an:

$$\oint_{\partial B} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{o} = \iiint_B (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz.$$

Für f mit $\Delta f = 0$ und

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=R} \left(f(\mathbf{x}) \left(-\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \right) - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \nabla f \right) d\mathbf{o} \\ & - \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \left(f(\mathbf{x}) \left(-\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \right) - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \nabla f \right) d\mathbf{o} = 0 \end{aligned}$$

Beim zweiten Integral zeigt der Normalvektor nach innen, dies wird durch das negative Vorzeichen ausgedrückt.

Wir formen nun um, verwenden, dass der Normalvektor auf die Sphäre $\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$ ist, und erhalten

$$\begin{aligned} & \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=R} \frac{R^2}{R^4} f(\mathbf{x}) d\mathbf{o} + \frac{1}{R} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=R} \nabla f \cdot d\mathbf{o} \\ & = \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} f(\mathbf{x}) \frac{r^2}{r^4} d\mathbf{o} + \frac{1}{r} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \nabla f \cdot d\mathbf{o}. \end{aligned}$$

Es bleibt nun noch die Berechnung des Integrals über den Gradienten. Für dieses wenden wir den Gaußschen Integralsatz an und erhalten (mit $\Delta f = 0$)

$$\oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=R} \nabla f \cdot d\mathbf{o} = \iiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq R} \Delta f dx dy dz = 0$$

Durch eine weitere Anwendung der Gebietsdifferentiation erhalten wir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{o} = f(\mathbf{x}_0)$$

Damit erhalten wir

Satz 3. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion ($\Delta f = 0$). Dann gilt für alle $\mathbf{x}_0 \in U$ und alle $R > 0$, für die $B(\mathbf{x}_0, R) \subseteq U$ gilt,

$$\frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=R} f(\mathbf{x}) d\mathbf{o}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Bemerkung 14. Aus einer Übungsaufgabe wissen wir, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \oint_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r} f(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \right) = \frac{1}{6} \Delta f(\mathbf{x}_0)$$

gilt. Die harmonischen Funktionen sind also durch die Mittelwerteigenschaft charakterisiert.

1.6.4 Der Integralsatz von Stokes im Raum

Der Integralsatz von Stokes verknüpft das Wegintegral eines Vektorfeldes entlang des Randes einer Fläche mit dem Flächenintegral der Rotation des Feldes über die Fläche.

Sei F eine Fläche in \mathbb{R}^3 , deren Rand eine differenzierbare Kurve ist. Wir verwenden zuerst den im Abschnitt 1.5.1 entwickelten Kalkül der äußeren Ableitung, um den Integralsatz zu „erraten“:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial F} P dx + Q dy + R dz &= \iint_F d(P dx + Q dy + R dz) \\ &= \iint_F \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \iint_F \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \iint_F \text{rot}(\mathbf{V}) \cdot d\mathbf{o} \end{aligned}$$

Wir erwarten also, dass die folgende Gleichung gilt

$$\oint_{\partial F} \mathbf{V} d\mathbf{x} = \iint_F \text{rot}(\mathbf{V}) \cdot d\mathbf{o}$$

Um diese Gleichung zu beweisen, parametrisieren wir die Fläche F und wenden dann den Gaußschen Integralsatz in der Ebene auf die erhaltenen Integrale an:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v), \quad (u, v) \in B \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Das Linienintegral entlang ∂F wird dann ausgedrückt als:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial F} P dx + Q dy + R dz &= \\
 \oint_{\partial B} P(\mathbf{x}(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + Q(\mathbf{x}(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) + R(\mathbf{x}(u, v)) \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) &= \\
 = \oint_{\partial B} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial y}{\partial u} + R \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(P \frac{\partial x}{\partial v} + Q \frac{\partial y}{\partial v} + R \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv &= \\
 = \iint_B \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} + Q \frac{\partial y}{\partial v} + R \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial y}{\partial u} + R \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right) du dv &
 \end{aligned}$$

Der Integrand im Doppelintegral wird dann unter Verwendung der Kettenregel umgeformt:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\
 &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v} + Q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\
 &+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v} + R \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\
 &- \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\
 &- \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial y}{\partial u} - Q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\
 &- \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial u} - R \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.
 \end{aligned}$$

Die Terme mit den zweiten partiellen Ableitungen der Koordinaten fallen offenbar weg. Die verbleibenden Terme fassen wir zusammen und erhalten

$$\begin{aligned}
 \iint_B \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right. \\
 \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right] du dv = \iint_F \text{rot}(\mathbf{V}) d\mathbf{o}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die gewünschte Formel bewiesen.

Bemerkung 15. Die Integralsätze von Gauß und Stokes motivieren folgende Definitionen:

- Ein Vektorfeld \mathbf{V} heißt *wirbelfrei*, wenn die Rotation Null ist.

- Ein Vektorfeld \mathbf{V} heißt *quellenfrei*, wenn die Divergenz Null ist

1.6.5 Interpretation des Integralsatzes von Stokes

Der Satz von Stokes stellt eine Beziehung zwischen dem ***Linienintegral eines Vektorfeldes*** entlang des Randes einer Fläche und dem ***Flächenintegral der Rotation*** dieses Feldes her:

$$\oint_{\partial F} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \iint_F \text{rot}(\mathbf{V}) \cdot d\mathbf{o}.$$

Wir wollen diesen Satz jetzt verwenden, um eine Interpretation der Rotation eines Vektorfeldes zu erhalten. Dazu wenden wir den Satz auf einen Kreis mit Radius R in der von zwei orthogonalen Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 aufgespannten Ebene an.

Die Kreisfläche F wird durch Polarkoordinaten beschrieben:

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = \mathbf{x}_0 + r \cos(\varphi) \mathbf{e}_1 + r \sin(\varphi) \mathbf{e}_2$$

mit

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R, & (\text{maximale Ausdehnung } R) \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, & (\text{volle Kreisbewegung}). \end{aligned}$$

Der Normalvektor auf die Ebene wird durch

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

gegeben.

Damit erhalten wir für das Linienelement entlang des Randes

$$d\mathbf{x} = (-R \sin(\varphi) \mathbf{e}_1 + R \cos(\varphi) \mathbf{e}_2) d\varphi$$

und für das vektorielle Oberflächenelement

$$d\mathbf{o} = \mathbf{e}_2 r dr d\varphi = \mathbf{e}_3 do.$$

Der Integralsatz von Stokes ergibt nun

$$\oint_{\partial F} \mathbf{V} d\mathbf{x} = \iint_F \langle \text{rot } \mathbf{V}, \mathbf{e}_3 \rangle do.$$

Auf der linken Seite steht jetzt der Anteil des Vektorfeldes \mathbf{V} , der mit der Kreisbewegung (in der Ebene, die von \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 aufgespannt wird) „mitrotiert“. Wenn wir diesen Anteil auf die Kreisfläche beziehen und $R \rightarrow 0$ gehen lassen, erhalten wir

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \oint_{\partial F} \mathbf{V} d\mathbf{x} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \iint_F \langle \text{rot } \mathbf{V}, \mathbf{e}_3 \rangle do = \langle \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}_0), \mathbf{e}_3 \rangle.$$

Die Wirbeldichte in der Ebene senkrecht zu \mathbf{e}_3 ist also $\langle \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{x}_0), \mathbf{e}_3 \rangle$. Die Rotation ist dann die ***gerichtete*** Wirbeldichte, also ein Vektor. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass ein räumlicher Wirbel eine Rotationsachse hat.

1.A Zusammenfassung des Kapitels: Vektoranalysis

Diese Zusammenfassung bietet einen strukturierten Überblick über die Inhalte der Vektoranalysis, wie sie im Skriptum dargestellt wurden. Schwerpunkte sind Vektorfelder, Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale und die zentralen Integralsätze (Green, Gauß, Stokes). Die wichtigsten Definitionen und Formeln werden hier in kompakter Form wiedergegeben.

Vektorfelder

- **Definition Vektorfeld:** Ein Vektorfeld in \mathbb{R}^3 ist eine Abbildung

$$\mathbf{V} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Analog in \mathbb{R}^2 : $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

- Beispiele sind physikalische Felder wie Gravitationsfeld, elektrisches Feld, Strömungsfeld usw.

Kurvenintegrale

Kurvenintegrale in \mathbb{R}^2

Sei C eine orientierte Kurve in der Ebene, parametrisiert durch

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Ein Vektorfeld $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ liefert das **Kurvenintegral**

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \int_C (P dx + Q dy) = \int_a^b [P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt.$$

Wichtige Eigenschaften:

- Das Integral hängt vom Verlauf der Kurve C und von deren **Orientierung** ab.
- Ist das Feld **konservativ** (d. h. ein Gradientenfeld), so hängt das Integral nur von Anfangs- und Endpunkt ab und verschwindet für geschlossene Kurven.

Wegunabhängigkeit und Potentialfelder

- **Wegunabhängiges Kurvenintegral:** Ein Kurvenintegral $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}$ heißt *wegunabhängig*, wenn sein Wert nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt, *nicht* aber von deren genauer Form.
- **Konservatives Vektorfeld:** Ein Feld $\mathbf{V}(x, y) = (P, Q)$ heißt *konservativ* oder *Gradientenfeld*, wenn es eine skalare Funktion $\varphi(x, y)$ gibt mit

$$\mathbf{V} = \nabla \varphi \iff P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Diese φ nennt man das *Potential*.

- **Integrabilitätsbedingung in \mathbb{R}^2 :** Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist \mathbf{V} genau dann konservativ, wenn

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

In diesem Fall verschwindet das Integral über jede geschlossene Kurve C :

$$\oint_C (P dx + Q dy) = 0.$$

Kurvenintegrale in \mathbb{R}^3

Für ein Vektorfeld $\mathbf{V}(x, y, z) = (P, Q, R)$ und eine Kurve

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

definiert man analog:

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \int_C (P dx + Q dy + R dz) = \int_a^b [P \dot{x}(t) + Q \dot{y}(t) + R \dot{z}(t)] dt.$$

Integrabilitätsbedingungen in \mathbb{R}^3 für Konservativität:

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Ist dies erfüllt und das Gebiet einfach zusammenhängend, so gibt es ein Potential $\varphi(x, y, z)$ mit $\mathbf{V} = \nabla \varphi$.

Integralsätze in der Ebene (2D)

Satz von Gauß–Green in 2D

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich mit Rand $C = \partial B$ in positiver Orientierung, und $\mathbf{V}(x, y) = (P, Q)$ ein hinreichend glattes Vektorfeld. Dann gilt

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Interpretation: Das **Linienintegral** um den Rand entspricht dem **Doppelintegral** der lokalen Wirbeldichte $(\partial_x Q - \partial_y P)$ im Inneren.

Oberflächenintegrale in \mathbb{R}^3

Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche

Sei $\mathbf{V}(x, y, z) = (P, Q, R)$ in \mathbb{R}^3 und F eine (orientierte) Fläche, parametrisiert durch

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in B \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Der zugehörige Normalenvektor ist

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v},$$

und das **Flussintegral** (Oberflächenintegral) von \mathbf{V} über F lautet:

$$\iint_F \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \iint_B \mathbf{V}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv.$$

Hierbei ist $d\mathbf{o} = \mathbf{n} du dv$ das **orientierte** Flächenelement.

Integralsätze im Raum (3D)

Satz von Gauß (Divergenztheorem)

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit **geschlossener** Oberfläche ∂B , und $\mathbf{V} = (P, Q, R)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\iint_{\partial B} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{V} dx dy dz \quad \text{mit} \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Deutung: Der (gesamte) **Fluss** durch die geschlossene Fläche ∂B ist gleich dem **Volumenintegral** der Quellenstärke (Divergenz) im Inneren von B .

Satz von Stokes

Sei F eine (orientierte) Fläche in \mathbb{R}^3 mit Randkurve ∂F , und $\mathbf{V} = (P, Q, R)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann lautet der Satz von Stokes:

$$\oint_{\partial F} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_F (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{o},$$

wobei

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Interpretation: Das **Linienintegral** (der Zirkulation) am **Rand** ∂F entspricht dem **Fluss** der **Rotation** (Wirbelstärke) durch die Fläche.

Wichtige Kernaussagen

- **Kurvenintegrale:**

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \int_C (P dx + Q dy) \quad (\text{in 2D}), \quad \int_C (P dx + Q dy + R dz) \quad (\text{in 3D}).$$

Ein Vektorfeld ist **konservativ**, wenn sein Kurvenintegral wegunabhängig ist (Existenz einer Potentialfunktion).

- **Satz von Gauß-Green (2D):**

$$\oint_{\partial B} (P dx + Q dy) = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

- **Satz von Gauß (3D) (*Divergenztheorem*):**

$$\iint_{\partial B} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{o} = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{V} dx dy dz.$$

- **Satz von Stokes (3D):**

$$\oint_{\partial F} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \iint_F (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{o}.$$

Kapitel 2

Hilbert-Räume

In der Mathematik B haben wir Fourier-Reihen als eine Möglichkeit gesehen periodische Funktionen f als Überlagerung von „reinen Schwingungen“ (\sin und \cos) darzustellen. Die Koeffizienten a_n und b_n in der Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

haben sich dabei durch die Formeln

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

ergeben.

Wir wollen diese Darstellung hier von einem etwas allgemeineren Standpunkt betrachten, um ein allgemeineres Prinzip dahinter zu entdecken. Dazu betrachten wir die Menge aller **quadratintegrierbaren** Funktionen

$$L^2([0, 2\pi]) = \left\{ f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (2.1)$$

und definieren darauf eine **Norm**

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Diese Norm hat die drei wichtigen Eigenschaften

1. $\|f\| \geq 0$ und $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ (**Definitheit**)
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ (**Homogenität**)
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (**Dreiecksungleichung**).

Die erste Eigenschaft scheint offensichtlich, hat aber eine gewisse mathematische Subtilität: wenn man eine Funktion f auf einer „kleinen“ Menge (z.B. einer endlichen Menge) abändert, ändert sich das Integral nicht. Die Eigenschaft $\|f\| = 0$ gilt also streng genommen nicht nur für die Nullfunktion, sondern für alle Funktionen, die **bis auf eine Menge vom Maß 0** verschwinden. Dies wird aber für unsere weiteren Betrachtungen keine Rolle spielen.

Die zweite Eigenschaft ist offensichtlich, weil Konstante aus dem Integral herausgezogen werden können. Die dritte Eigenschaft braucht noch einen Beweis. Diesen wollen wir nun vorbereiten.

Zuerst stellen wir eine Analogie unserer bisherigen Überlegungen mit dem euklidischen Raum \mathbb{R}^n (bzw. \mathbb{C}^n) fest. In diesen Räumen ist ein Abstand durch

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

gegeben. Von diesem wissen wir, dass er die drei Eigenschaften einer Norm hat. Wir wissen auch, dass dieser Abstand einen engen Zusammenhang zu einem Skalarprodukt hat, das durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$$

gegeben ist. Es gilt dann nämlich $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Nun haben Summen und Integrale ähnliche Eigenschaften.

Diese Beobachtung bringt uns zur Definition eines Skalarprodukts auf $L^2([0, 2\pi])$:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (2.3)$$

das dann offenbar dieselbe Relation zur eben definierten Norm hat. Das Skalarprodukt hat dann die Eigenschaft

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}. \quad (2.4)$$

Wir betrachten nun für $f, g \neq 0$ den Ausdruck

$$\| \|g\|f - \rho \|f\|g \|^2 \geq 0$$

für ein $\rho \in \mathbb{C}$ mit Betrag 1, das wir noch geeignet wählen werden. Indem wir den Ausdruck ausquadrieren und (2.4) verwenden, erhalten wir

$$\|g\|^2 \|f\|^2 - \|g\| \|f\| \bar{\rho} \langle f, g \rangle - \|f\| \|g\| \rho \overline{\langle f, g \rangle} + \|f\|^2 \|g\|^2.$$

Wir wählen nun die komplexe Zahl ρ so, dass $\bar{\rho} \langle f, g \rangle = |\langle f, g \rangle| \geq 0$ gilt. Dann erhalten wir

$$2\|f\| \|g\| (\|f\| \|g\| - |\langle f, g \rangle|) \geq 0,$$

woraus sich die **Cauchy-Schwarz**-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (2.5)$$

ergibt.

Damit können wir nun die Dreiecksungleichung beweisen. Wir berechnen dazu

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} + \|g\|^2 = \|f\|^2 + 2\Re\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2.\end{aligned}$$

Die obigen Überlegungen führen uns zu folgender Definition.

Definition 7. Ein Vektorraum H (über \mathbf{R} oder \mathbf{C}) ist ein Hilbert-Raum, wenn er mit einem Skalarprodukt und der dadurch induzierten Norm ausgestattet ist und zusätzlich bezüglich dieser Norm *vollständig* ist.

Bemerkung 16. Der Begriff der Vollständigkeit bedeutet, dass jede Cauchy-Folge in der Norm auch einen Grenzwert besitzt; diese Eigenschaft ist analog zur definierenden Eigenschaft der reellen Zahlen, wird aber hier keine Rolle spielen. Das Skalarprodukt muss noch folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\forall v \in H : \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u = 0;$$

der einzige Vektor u , der auf allen Vektoren des Raums senkrecht steht, ist der Nullvektor.

Beispiel 9. Als erstes Beispiel eines Hilbert-Raums haben wir bereits den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen $L^2([0, 2\pi])$ gesehen. Im Abschnitt 2.2 werden wir diesen Raum auf allgemeinere Grundmengen verallgemeinern. Ein weiteres Beispiel ist der Raum der quadratsummierbaren Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Ebenso definiert man den Raum der quadratsummierbaren Doppelfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2}.$$

2.1 Alternativer Zugang zu den Fourier-Reihen

Wir wollen nun die Theorie der Fourier-Reihen noch einmal entwickeln, indem wir die soeben entwickelten Ideen verwenden. Dazu fragen wir uns, für welche Koeffizienten

a_0, \dots, a_n und b_1, \dots, b_n die Norm

$$\left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right\|^2$$

minimal wird. Wir suchen also das **trigonometrische Polynom**, das im Sinne unserer Norm der Funktion f am nächsten liegt. Bei der Suche nach diesem hilft uns nun die Analogie zum euklidischen Raum: wenn wir zu einem gegebenen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ denjenigen Vektor \mathbf{y} in einem Unterraum V finden wollen, der zu \mathbf{x} minimalen Abstand hat, dann wissen wir, dass dies genau der Vektor \mathbf{y} ist, für den für alle $\mathbf{z} \in V$

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 0$$

gilt. Der Vektor $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ muss also auf allen Vektoren von V senkrecht stehen. Anders gesagt ist \mathbf{y} die Projektion von \mathbf{x} auf V .

Um die obige Aufgabe zu lösen, müssen wir also die Koeffizienten a_0, \dots, a_n und b_1, \dots, b_n so bestimmen, dass

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)$$

auf allen Elementen von $\text{span}(\{1, \cos(x), \dots, \cos(nx), \sin(x), \dots, \sin(nx)\})$ senkrecht steht, also

$$\int_0^{2\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right) \cos(kx) dx = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right) \sin(kx) dx = 0$$

für $k \geq 0$ bzw. $k \geq 1$. Daraus ergeben sich dann wegen der Orthogonalität der Winkelfunktionen die bekannten Formeln für die Koeffizienten. Diese können wir jetzt auch in der Form

$$a_k = \frac{\langle f(x), \cos(kx) \rangle}{\|\cos(kx)\|^2} \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{\langle f(x), \sin(kx) \rangle}{\|\sin(kx)\|^2} \quad \text{für } k \geq 0$$

schreiben.

Wir wollen nun die neue Überlegung noch weiter ausbauen. Dazu bemerken wir, dass für zwei Funktionen f, g mit $\langle f, g \rangle = 0$ die Relation

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2,$$

also der **pythagoräische Lehrsatz**, gilt. Damit erhalten wir

$$\|f\|^2 = \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right\|^2 + \left\| \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right\|^2.$$

Auf den letzten Term können wir den Lehrsatz noch einmal anwenden, weil die Terme paarweise aufeinander senkrecht stehen:

$$\left\| \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Damit erhalten wir

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

bzw. indem wir $n \rightarrow \infty$ gehen lassen

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx,$$

die **Besselsche Ungleichung**. Wir sehen auch, dass in dieser Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right\|^2 = 0$$

gilt, wenn also die trigonometrischen Polynome die gegebene Funktion f im Sinne der Norm beliebig genau approximieren können. Das ist tatsächlich der Fall, und es gilt daher die **Parsevalsche Gleichung** oder **Vollständigkeitsrelation**

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Diese zeigt auch, dass wir zur Darstellung aller quadratintegrierbaren Funktionen als Fourier-Reihe tatsächlich alle Funktionen $1, \cos(x), \cos(2x), \dots$ und $\sin(x), \sin(2x), \dots$ brauchen. Wenn nur eine davon weggelassen wird, gilt im allgemeinen die Gleichung nicht mehr.

2.2 Verallgemeinerung

Wir können die im letzten Abschnitt behandelte Situation nun auf analoge Fragestellungen verallgemeinern: wir beginnen mit einem Raum X , auf dem wir integrieren können (in unseren späteren Anwendungen wird das z.B. eine Kugeloberfläche mit dem Oberflächenmaß, oder ein Quader mit dem Volumen). Dann betrachten wir den Hilbert-Raum

$$L^2(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \right\}$$

mit dem zugehörigen Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$$

und der Norm

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_X |f(x)|^2 d\mu(x).$$

Wenn wir nun ein **vollständiges** orthogonales System von Funktionen $u_k : X \rightarrow \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) finden können, dann können wir jede Funktion $f \in L^2(X)$ in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, u_k \rangle u_k(x) \quad (2.6)$$

darstellen. Dabei kann der Begriff der Vollständigkeit auf zwei äquivalente Weisen formuliert werden:

1. es gilt: $\forall k : \langle f, u_k \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$
2. $\forall f \in L^2(X) : \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, u_k \rangle|^2 = \|f\|^2$.

Dabei ist die Darstellung (2.6) als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, u_k \rangle u_k \right\|^2 = 0$$

zu verstehen. Eine punktweise Konvergenz der Reihe kann im allgemeinen nicht erwartet werden.

Kapitel 3

Partielle Differentialgleichungen

Viele Naturvorgänge werden durch Differentialgleichungen beschrieben. In der Mathematik B wurden vor allem gewöhnliche Differentialgleichungen, also Differentialgleichungen für Funktionen in einer Variablen, behandelt. Komplexere physikalische Vorgänge beinhalten aber oft Funktionen in mehreren Variablen (z.B. Zeit und Ort), deren Ableitungen miteinander in Beziehung gesetzt werden; dadurch entstehen sogenannte partielle Differentialgleichungen, deren Lösungstheorie deutlich komplexer als die der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist. In diesem Kapitel werden einige solche Gleichungen, deren Lösungen und Lösungsmethoden untersucht: das elektrische Potential im ladungsfreien Raum beschrieben durch die Potentialgleichung, die Gleichung der Wärmeausbreitung, sowie die Gleichung eines schwingenden Mediums (Saite, Membran).

3.1 Die Lösung der Potentialgleichung in \mathbb{R}^2

Im Kapitel 4 werden die Maxwell-Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld herstellen, genauer behandelt. Ein Ergebnis, das aus diesen Gleichungen folgt, ist die Tatsache, dass das elektrische Potential Φ im ladungsfreien Raum der Potentialgleichung $\Delta\Phi = 0$ genügt. Eine realistische Betrachtung dieser Gleichung findet natürlich im \mathbb{R}^3 statt, wir beginnen aber mit dem einfacheren zweidimensionalen Fall und entwickeln dabei die Ideen, die für den dreidimensionalen Fall benötigt werden.

Es werden Funktionen u untersucht, welche die Eigenschaft $\Delta u = 0$ erfüllen, wobei Δ der Laplace-Operator ist. Anders beschrieben erfüllen die Funktionen die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Die Lösungen dafür heißen harmonische Funktionen.

Erinnerung 2. Für Funktionen, die diese Eigenschaft erfüllen, gilt in jedem Punkt

die Mittelwerteigenschaft:

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=R} u(\mathbf{x}) ds \quad (3.1)$$

Wir haben diese Eigenschaft im Abschnitt 1.6.3 für harmonische Funktionen im \mathbb{R}^3 nachgewiesen. Eine ähnliche Vorgehensweise liefert die Mittelwerteigenschaft im \mathbb{R}^2 .

Bemerkung 17. Die analoge eindimensionale Differentialgleichung wäre $u'' = 0$. Diese wird genau von den linearen Funktionen erfüllt. Diese haben klarerweise die Mittelwerteigenschaft. Die harmonischen Funktionen sind so gesehen eine Verallgemeinerung der linearen Funktionen, allerdings sind diese Funktionen in höheren Dimensionen deutlich vielfältiger und komplizierter.

Um die Sache dennoch etwas zu vereinfachen, werden Lösungen der Gleichung $\Delta u = 0$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$ gesucht. Dabei werden die Werte von u auf dem Rand der Kreisscheibe als vorgegeben angenommen. Es gilt also $\Delta u(x, y) = 0$ für $x^2 + y^2 < 1$ und die Randbedingung $u(\cos(t), \sin(t)) = f(t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

Auf der Kreisscheibe bietet sich die Einführung von Polarkoordinaten an: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Durch mehrfache Kettenregel kann man den Laplace-Operator in Polarkoordinaten ausdrücken:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (3.2)$$

3.1.1 Der Trennungsansatz

Um strukturiert vorzugehen, werden zuerst möglichst viele Lösungen dieser Gleichung gesucht und mit Linearkombinationen dieser Lösungen die Randbedingungen erfüllt. Die einfachste Art ist mittels Trennungsansatz vorzugehen.

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= R(r) \cdot \Phi(\varphi) \\ \Delta u &= R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0 & \left| \cdot \frac{r^2}{R\Phi} \right. \\ r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} &= 0 & (3.3) \\ \underbrace{r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R}}_r &= - \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_\varphi \end{aligned}$$

Damit sind Funktionen, die nur von r abhängen auf eine Seite der Gleichung gebracht worden und Funktionen, die nur von φ abhängen auf die andere Seite. Weil r und φ unabhängig variieren können, müssen beide Seiten konstant sein. Zuerst betrachten wir die rechte Seite der Gleichung.

Winkelanteil

Dafür stellt sich heraus, dass nur positive Werte für die Konstante sinnvolle Lösungen ergeben, daher der Ansatz mit k^2 . Das Quadrat liefert uns leichter lesbare Ausdrücke für die Lösungen.

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi''}{\Phi} &= k^2 & k \dots \text{konstant} \\ \Phi'' + k^2\Phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Erinnerung 3. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, wie sie in Mathematik B behandelt wurde. Man löst sie über die charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + k^2 = 0$ mit $\lambda = \pm ki$.

Eine mögliche Lösung wäre in Form von Exponentialfunktionen: $e^{ik\varphi}$, $e^{-ik\varphi}$. Da wir hier reelle Größen betrachten, ziehen wir die Darstellung der Lösungen in Winkelfunktionen vor. Diese erhalten wir als Realteil und Imaginärteil der komplexen Lösungen. Also erhält man einen Lösungsansatz für jede mögliche Konstante k mit:

$$\Phi_k(\varphi) = a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi) \quad (3.5)$$

Wobei $\Phi_k(0) = \Phi_k(2\pi)$ gelten muss, das heißt Φ_k muss 2π periodisch sein. Daraus folgt $k \in \mathbb{N}$. Betrachten wir nun den Spezialfall $k = 0$, dann muss $\Phi'' = 0$ gelten. Dafür ist die Lösung bekannt: $\Phi(\varphi) = A\varphi + B$. Es handelt sich um eine lineare Funktion. Diese muss allerdings 2π periodisch und daher $A = 0$ sein. Als Ergebnis dieser Untersuchung gibt es also $\forall k \in \mathbb{N}_0$ Lösungen:

$$\Phi_k(\varphi) = \begin{cases} a_0 & \text{für } k = 0 \\ a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi) & \text{für } k \geq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Bemerkung 18. Hätten wir vorhin statt der positiven Werte k^2 negative Werte $-k^2$ für die Konstante verwendet, hätten wir hier statt \sin und \cos , \sinh und \cosh in der letzten Formel erhalten. Diese Funktionen sind aber nicht periodisch. Die zugehörigen Lösungen wären für uns also unbrauchbar gewesen.

Radialer Anteil

Betrachten wir nun also die linke Seite der Gleichung aus dem Trennungsansatz:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} &= k^2 & \Bigg| \cdot R \\ r^2 R'' + r R' - k^2 R &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Erinnerung 4. Diese Differentialgleichung ist ebenfalls aus der Mathematik B bekannt und man kann sie mit dem Ansatz $R(r) = r^\alpha$ lösen. Man bildet die erste und zweite Ableitung dieser Funktion und setzt dann in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}
 R' &= \alpha \cdot r^{\alpha-1} \\
 R'' &= \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot r^{\alpha-2} \\
 0 &= r^2 \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot r^{\alpha-2} + r \cdot \alpha \cdot r^{\alpha-1} - k^2 \cdot r^\alpha \\
 0 &= (\alpha^2 - \alpha) \cdot r^\alpha + \alpha \cdot r^\alpha - k^2 \cdot r^\alpha \\
 0 &= (\alpha^2 - \alpha + \alpha - k^2) \cdot r^\alpha \\
 0 &= (\alpha^2 - k^2) \cdot r^\alpha
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich $\alpha = \pm k$. Ganz ähnlich zur Lösungsvariante im Unterabschnitt Winkelanteil kommt nur die Lösung mit r^k , $k \in \mathbb{N}$ in Frage, weil r^{-k} unstetig für $r = 0$ und daher unbrauchbar ist. Wie im Unterabschnitt Winkelanteil betrachten wir auch den Sonderfall $k = 0$:

$$\begin{aligned}
 r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} &= 0 & \left| \cdot \frac{R}{r} \right. \\
 rR'' + R' &= 0 & \\
 (rR')' &= 0 & \left| \int \cdot \right. \\
 rR' &= C &
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

1. Fall: $C = 0 \Rightarrow R' = 0$ also ist R eine Konstante.

2. Fall: $C \neq 0 \Rightarrow R' = \frac{C}{r} \quad R = C \ln(r)$

was unstetig für $r \rightarrow 0$, also unbrauchbar ist.

Damit haben wir alle Lösungen von $\Delta u = 0$ gefunden, sie sich in der Form $R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ schreiben lassen und auf $r \leq 1$ stetig sind.

Lösung

Wir können daher versuchen die allgemeine Lösung aus folgenden Funktionen zu kombinieren

$$u_k(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{für } k = 0 \\ r^k \cdot (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) & \text{für } k \geq 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Bemerkung 19. Wir bemerken, dass die gefundenen Funktionen auch in der Form

$$(x \pm iy)^k = (r(\cos(\varphi) \pm i \sin(\varphi)))^k = r^k (\cos(k\varphi) \pm i \sin(k\varphi))$$

in kartesischen Koordinaten geschrieben werden können. Für diese Funktionen zeigt

die einfache Rechnung

$$\Delta(x + iy)^k = k(k-1)(x + iy)^{k-2} + k(k-1)i^2(x + iy)^{k-2} = 0,$$

dass sie der Potentialgleichung genügen. In kartesischen Koordinaten sind diese Funktionen Polynome.

Für die Erfüllung der Randbedingung verfolgen wir die Idee der Fourier-Reihe weiter:

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)) \quad (3.11)$$

Die Randbedingung gibt uns für die Funktion $f(\varphi)$ auf dem Rand des Einheitskreises Werte vor. Um die Kreislinie zu beschreiben kann man $r = 1$ setzen:

$$u(1, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi) \stackrel{!}{=} f(\varphi) \quad (3.12)$$

Die Aufgabe besteht nun darin die Koeffizienten der Fourier-Reihe auszurechnen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \quad (3.13)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi \quad (3.14)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi \quad (3.15)$$

Beispiel 10. Bestimmung der Lösung der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ im Inneren des Kreises $x^2 + y^2 \leq 1$.

Die Randbedingung lautet $u(\cos(t), \sin(t)) = t^2$ für $-\pi \leq t \leq \pi$.

Wir beginnen gleich mit der Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(0 \cdot t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{3\pi} (\pi^3 + (-\pi)^3) = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(k t) dt = \frac{1}{\pi} \left(t^2 \sin(k t) \frac{1}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \sin(k t) \frac{1}{k} dt \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{k} \underbrace{\sin(k \pi)}_{=0, \forall k \in \mathbb{N}} - \frac{(-\pi)^2}{k} \underbrace{\sin(-k \pi)}_{=0, \forall k \in \mathbb{N}} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \sin(k t) \frac{1}{k} dt \right) = \\
&= -\frac{2}{\pi k} \left(-t \cos(k t) \frac{1}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k t) \frac{1}{k} dt \right) = \\
&= -\frac{2}{\pi k} \left(-\frac{\pi}{k} \underbrace{\cos(k \pi)}_{=(-1)^k, \forall k \in \mathbb{N}} + \frac{-\pi}{k} \underbrace{\cos(-k \pi)}_{=\cos(k \pi)} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k t) dt \right) = \\
&= -\frac{2}{\pi k^2} \left(-2\pi(-1)^k + \frac{\sin(k t)}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \\
&= -\frac{2}{\pi k^2} \left(-2\pi(-1)^k + \frac{\sin(k \pi)}{k} - \frac{\sin(-k \pi)}{k} \right) = \\
&= -\frac{2}{\pi k^2} \left(-2\pi(-1)^k + 0 - 0 \right) = \frac{4}{k^2} (-1)^k
\end{aligned}$$

Die Rechnung für b_k ist kurz, weil die Funktion $f(t) = t^2$ gerade ist und daher nicht durch Sinusterme dargestellt werden kann: $\forall k \in \mathbb{N} : b_k = 0$.

Die Lösung der Potentialgleichung unter Anwendung der Fourier-Reihen Methode lautet also:

$$u(r, \varphi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(k \varphi)$$

Man kann das auch als Rezept zur Lösung der Potentialgleichung ansehen. Betrachtet man die Darstellung der Funktion $f(\varphi)$ als Fourier-Reihe:

$$f(\varphi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(k \varphi)$$

Dann braucht man um $u(r, \varphi)$ zu erhalten nur den Ausdruck r^k unter der Summe dazu multiplizieren. Die Lösung im Inneren des Kreises und die Fourier-Reihe der Funktion am Rand hängen auf diese Weise zusammen.

Außerdem kann man sehen, dass die Funktion $u(r, \varphi)$ zumindest im Mittelpunkt die Mittelwerteigenschaft erfüllt. Integriert man einmal um die Kurve des Kreises, fallen die Terme $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(k \varphi)$ weg und es bleibt nur $\frac{\pi^2}{3}$ übrig.

3.1.2 Poissonsche Integralformel

Herleitung der Formel

Um über weitere Untersuchungen zu einer einfacheren Schreibweise der vorhin formulierten Lösung der Potentialgleichung (3.11) zu kommen, setzt man zuerst die Formeln für die Koeffizienten der Fourier-Reihe in diese Lösung ein:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\frac{\cos(k\varphi)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt + \frac{\sin(k\varphi)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \right)$$

Durch die Linearität des Integrals kann man $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)$ aus den Summen heraus heben und man erhält:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \underbrace{\left(\cos(k\varphi) \cos(kt) + \sin(k\varphi) \sin(kt) \right)}_{=\cos(k(\varphi-t)) \text{ nach Additionstheorem}} \right) dt$$

Daraufhin untersucht man weiter über $\psi = \varphi - t$ folgende Summe:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\psi) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k 2 \cos(k\psi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (e^{ik\psi} + e^{-ik\psi}) = \\ &= 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (r \cdot e^{i\psi})^k + (r \cdot e^{-i\psi})^k}_{\text{geometrische Reihen}} = \\ &= 1 + \frac{r \cdot e^{i\psi}}{1 - r \cdot e^{i\psi}} + \frac{r \cdot e^{-i\psi}}{1 - r \cdot e^{-i\psi}} = \\ &= \frac{(1 - r e^{i\psi})(1 - r e^{-i\psi}) + (1 - r e^{-i\psi}) r e^{i\psi} + (1 - r e^{i\psi}) r e^{-i\psi}}{(1 - r e^{i\psi})(1 - r e^{-i\psi})} = \\ &= \frac{1 - r e^{i\psi} - r e^{-i\psi} + r^2 + r e^{i\psi} - r^2 + r e^{-i\psi} - r^2}{1 - r e^{i\psi} - r e^{-i\psi} + r^2} = \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2 r \cos \psi + r^2} \end{aligned}$$

Dadurch erhält man die Poissonsche Integralformel:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2 r \cos(\varphi - t) + r^2} dt \quad (3.16)$$

Welche die allgemeine Lösung der Potentialgleichung im inneren des Kreises als Integral über die Werte auf der Kreisperipherie darstellt. Durch Rückparametrisierung in x und y Koordinaten erhält man eine noch kompaktere Schreibweise. Man wählt

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ und definiert $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, sowie $g(\mathbf{z}) = f(t)$. Dann kann man das Integral umschreiben zu:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\|\mathbf{z}\|=1} g(\mathbf{z}) \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|^2} ds(\mathbf{z}) \quad (3.17)$$

\mathbf{z} stellt dabei einen Punkt am Rand des Kreises und \mathbf{x} im Inneren des Kreises dar. $ds(\mathbf{z})$ meint die Integration über die Kreislinie mit der Bogenlänge in der Variablen \mathbf{z} . Daher gilt $ds(\mathbf{z}) = dt$.

Zur Erläuterung des Nenners:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \cos t - r \cos \varphi \\ \sin t - r \sin \varphi \end{pmatrix} \right\|^2 = \\ &= \left(\sqrt{(\cos t - r \cos \varphi)^2 + (\sin t - r \sin \varphi)^2} \right)^2 = \\ &= \cos^2 t - 2r \cos t \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 t - 2r \sin t \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t - 2r \underbrace{(\cos t \cos \varphi + \sin t \sin \varphi)}_{=\cos(\varphi-t) \text{ (Additionstheorem)}} + r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \\ &= 1 - 2r \cos(\varphi - t) + r^2 \end{aligned}$$

Für Berechnungen ist es günstig die parametrisierte Form der Formel (3.16) zu verwenden. Die kompaktere Form ist günstiger für das Verständnis der Lösung der Potentialgleichung im \mathbb{R}^3 .

Ausblick 1. Die Methode mit Fourier-Reihen funktioniert als Lösung der Potentialgleichung im \mathbb{R}^3 nicht mehr, weil man hier die Werte nicht mehr auf der Kreislinie vorgegeben hat, sondern auf der Kugeloberfläche. Man braucht dafür Funktionen, die die Sinus- und Cosinusfunktion auf der Kugeloberfläche vertreten. Dies ist eine Aufgabe für den nächsten Abschnitt. Es ist günstig die kompakte Poissonsche Integralformel für \mathbb{R}^2 zu verstehen, um sie später für \mathbb{R}^3 zu erarbeiten. Außerdem hilft es zumindest grundsätzlich zu verstehen, wie die Lösung der Potentialgleichung für andere Gebiete als die Kreisscheibe aussehen kann.

3.1.3 Alternative Herleitung der Formel

Erinnerung 5. Integralsatz von Gauß in \mathbb{R}^2 :

$$\oint_{\partial B} \mathbf{V} \mathbf{n} \, ds = \iint_B \operatorname{div}(\mathbf{V}) \, dx \, dy \quad (3.18)$$

Seien f und g innerhalb von B differenzierbare Funktionen und das Vektorfeld gegeben mit $\mathbf{V} = f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f$. Dann überlegt man sich für die Divergenz dieses Vektorfeldes:

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle + f \Delta g - \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle - g \Delta f = f \Delta g - g \Delta f$$

Dann setzt man sie in den Integralsatz (3.18) ein:

$$\oint_{\partial B} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \mathbf{n} \, ds = \iint_B f \Delta g - g \Delta f \, dx \, dy$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich Null, weil wir die Formel für $\Delta f = 0 = \Delta g$ anwenden wollen. Daher kann die Gleichung umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial B} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \mathbf{n} \, ds = \oint_{\partial B} f \langle \operatorname{grad} g, \mathbf{n} \rangle - g \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{n} \rangle \, ds = \\ &= \oint_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, ds \end{aligned} \quad (3.19)$$

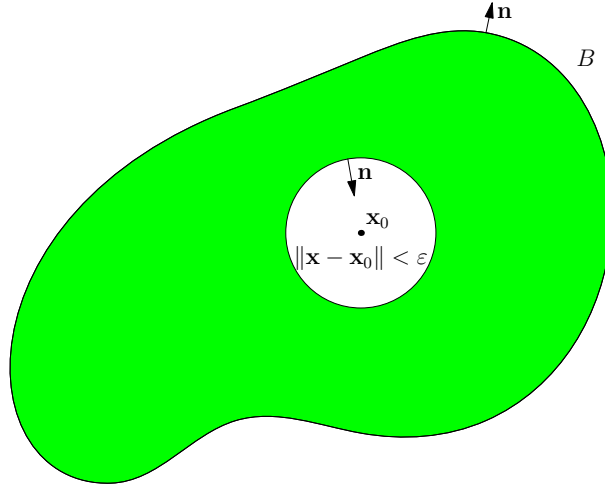
Für g setzen wir mit $\mathbf{x}_0 \in B$ die Funktion:

$$g(\mathbf{x}) = \ln \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) = -\ln \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) = -\ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad (3.20)$$

Es folgt der Nachweis, dass wirklich $\Delta g = 0$ gilt. Allerdings muss man aufpassen, weil die Funktion an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ nicht definiert ist.

$$\begin{aligned} \Delta g &= 0 \text{ für } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 : \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \cdot \frac{2(x - x_0)}{2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ \operatorname{grad} g &= -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} + (x - x_0) \cdot \frac{2(x - x_0)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)^2} = \\ &= -\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} + \frac{2(x - x_0)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^4} \\ \text{Analog gilt: } \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} + \frac{2(y - y_0)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^4} \\ \text{Also:} \\ \Delta g &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} + \frac{2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da man die Formel im Fall $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ nicht einfach in den Integralsatz einsetzen kann entfernt man einen kleinen Kreis um den Punkt \mathbf{x}_0 aus dem Bereich B . Man wendet die Formel also für den Bereich $\tilde{B} := B \setminus \{\mathbf{x} \in B \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$ an.

Abbildung 3.1.1: Der Bereich B ohne den Kreis um \mathbf{x}_0

$$\oint_{\partial \tilde{B}} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \mathbf{n} \, ds = \iint_{\tilde{B}} f \Delta g - g \Delta f \, dx \, dy = 0 \quad (3.22)$$

Wobei die Definitionslücke der Funktion g in \mathbf{x}_0 kein Problem für die folgende Argumentation darstellt, weil der Bereich \tilde{B} den Punkt \mathbf{x}_0 nicht enthält. Außerdem liegt \mathbf{x}_0 nicht auf dem Rand ∂B .

$$0 = \oint_{\partial B} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \mathbf{n} \, ds - \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\varepsilon} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \mathbf{n} \, ds$$

Wie bei den Überlegungen zum Beweis der dreidimensionalen Mittelwerteigenschaft in Abschnitt 1.6.3 wollen wir nun den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchführen. Das Integral

$$\oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\varepsilon} g \operatorname{grad} f \mathbf{n} \, ds$$

verhält sich wie $\varepsilon \log \varepsilon$, was für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet.

Für die Vereinfachung des zweiten Integrals stellen wir noch eine Nebenrechnung an:

$$\begin{aligned} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\varepsilon} f \operatorname{grad} g \mathbf{n} \, ds &= - \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\varepsilon} f(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}}_{=\mathbf{n}, \text{ auf die Kreislinie}} \, ds = \\ &= - \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\varepsilon} f(\mathbf{x}) \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \, ds = \\ &= - \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\varepsilon} f(\mathbf{x}) \frac{1}{\underbrace{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}_{=\varepsilon}} \, ds = -\frac{1}{\varepsilon} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\varepsilon} f(\mathbf{x}) \, ds = \\ &= -2\pi \frac{1}{2\pi\varepsilon} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\varepsilon} f(\mathbf{x}) \, ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -2\pi f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert also

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B} (g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g) \mathbf{n} \, ds = f(\mathbf{x}_0) \quad (3.23)$$

Dieses Integral soll noch weiter zu etwas vereinfacht werden, damit lediglich der Ausdruck $f \operatorname{grad} g$ übrig bleibt. Dafür brauchen wir eine Funktion $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Delta h = 0$.
2. $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \partial B$, dem Rand des Gebiets.
3. h ist auf B überall definiert, hat also keine Unstetigkeitsstelle in \mathbf{x}_0 .

Wenn man eine solche Funktion gefunden hat, dann kann die folgende Rechnung durchgeführt werden. Man wendet die Formel (3.22) auf f und g an und subtrahiert sie von der Gleichung (3.23):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B} (f \operatorname{grad} h - h \operatorname{grad} f) \mathbf{n} \, ds &= 0 \\ \oint_{\partial B} (f \operatorname{grad}(g - h) - \underbrace{(g - h)}_{=0 \text{ auf } \partial B} \operatorname{grad} f) \mathbf{n} \, ds &= -2\pi f(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B} f \operatorname{grad}(h - g) \mathbf{n} \, ds$$

Durch das Auffinden einer Funktion h mit den geforderten Eigenschaften ergibt sich also eine Formel, die f in jedem Punkt von B aus den vorgegebenen Funktionswerten am Rand ∂B berechnet. Wie h genau aussieht, hängt vom betreffenden Gebiet ab. Für die Kreislinie ist das relativ einfach, für andere Gebiete in der Regel sehr kompliziert.

Anwendung auf die Kreislinie

Sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $h(\mathbf{x}) = \ln \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{x}_0\|} \right)$ mit $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2}$.

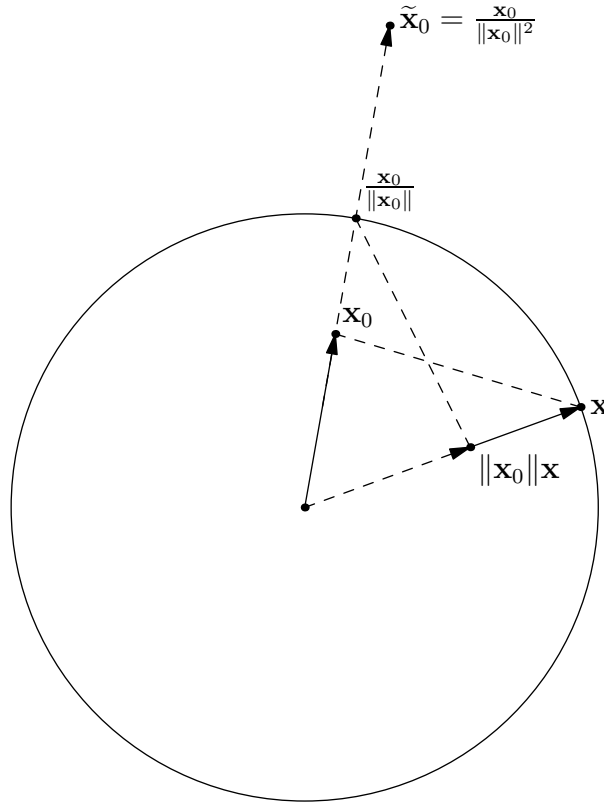


Abbildung 3.1.2: Zusammenhänge zwischen den Punkten, mit denen die Funktion h definiert wurde.

Aus der Grafik erkennt man, dass die Abstände $\left\| \left\| \mathbf{x}_0 \right\| \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}_0}{\left\| \mathbf{x}_0 \right\|} \right\|$ und $\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\|$ gleich lang sind. Weil auf der Kreislinie $\left\| \mathbf{x} \right\| = 1$ gilt, ergibt das folgenden Zusammenhang:

$$\left\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0 \right\| \cdot \left\| \mathbf{x}_0 \right\| = \left\| \left\| \mathbf{x}_0 \right\| \mathbf{x} - \left\| \mathbf{x}_0 \right\| \tilde{\mathbf{x}}_0 \right\| = \left\| \left\| \mathbf{x}_0 \right\| \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}_0}{\left\| \mathbf{x}_0 \right\|} \right\| = \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\|$$

Das heißt für $\left\| \mathbf{x} \right\| = 1$ gilt $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. Nun zur Vorarbeit der Berechnung des Gradienten der Differenz der Funktionen h und g :

$$h(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = \ln \left(\frac{1}{\left\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0 \right\|} \right) - \ln \left(\frac{1}{\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\|} \right) = \ln \left(\frac{\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\|}{\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\| \cdot \left\| \mathbf{x}_0 \right\|} \right)$$

Den Gradienten der Subtraktion der Funktionen h und g berechnet man analog zur Rechnung (3.21):

$$\text{grad} \left(h(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \right) = -\frac{\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0}{\left\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0 \right\|^2} + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\|^2}$$

Da der Normalvektor \mathbf{n} der Kreislinie dem Vektor \mathbf{x} entspricht und weiterhin $\left\| \mathbf{x} \right\| = 1$

gültig ist, kann wie folgt weiter gerechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} (h(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{x} &= -\frac{\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_0 \rangle}{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|^2} + \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \\
 &= -\frac{1^2 - \langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_0 \rangle}{\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2}} + \frac{1^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \\
 &= \frac{-\|\mathbf{x}_0\|^2 + \langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}_0 \rangle \|\mathbf{x}_0\|^2 + 1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \\
 &= \frac{-\|\mathbf{x}_0\|^2 + \langle \mathbf{x}, \|\mathbf{x}_0\|^2 \tilde{\mathbf{x}}_0 \rangle + 1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \\
 &= \frac{-\|\mathbf{x}_0\|^2 + \langle \mathbf{x}, \|\mathbf{x}_0\|^2 \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \rangle + 1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \\
 &= \frac{-\|\mathbf{x}_0\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle + 1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \\
 &= \frac{1 - \|\mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}
 \end{aligned}$$

Was dem Ausdruck in der Poissonschen Integralformel (3.17) entspricht. Für die Einheitskreisscheibe B erhalten wir also:

$$f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\|\mathbf{x}\|=1} f(\mathbf{x}) \frac{1 - \|\mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} ds(\mathbf{x})$$

Aber diese Formel hat einen Zugang, den wir verallgemeinern können.

Bemerkung 20. Mit diesen Überlegungen kann man zumindest prinzipiell das Randwertproblem $\Delta f = 0$ mit $f|_{\partial B} = F$ für beliebige Gebiete B lösen. Dazu muss man für jedes $\mathbf{x}_0 \in B$ eine stetige Funktion h finden, für die $h(\mathbf{x}) = \ln\left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}\right)$ für alle $\mathbf{x} \in \partial B$ gilt. Die Funktion $h_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) - \ln\left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}\right) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ heißt dann die

Green-Funktion zum Gebiet B . Damit können wir

$$f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B} f(\mathbf{x}) \operatorname{grad} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} ds$$

schreiben. Die Bestimmung dieser Funktion ist meistens sehr kompliziert.

3.2 Die Lösung der Potentialgleichung in \mathbb{R}^3

3.2.1 Poissonsche Integralformel

Gesucht ist die Lösung von $\Delta f = 0$ auf der Kugel $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ mit vorgegebenen Werten von f auf dem Rand von B : $\partial B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Dazu wird eine Funktion g gebraucht, die genau in einem Punkt singularär ist. Also soll g die Gleichung $\Delta g = 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ erfüllen und im Punkt \mathbf{x}_0 eine Singularität besitzen. Ein Beispiel aus der Physik ist das elektrische Potential, wobei das elektrische Feld in den positiv und negativ geladenen Teilchen jeweils Singularitäten aufweist. Von dieser Vorstellung inspiriert kann man g folgendermaßen ansetzen:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2(x-x_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} = -\frac{x-x_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \\ \text{grad } g &= -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nun zum Nachweis, dass $\Delta g = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} + (x-x_0) \frac{3}{2} \cdot \frac{2(x-x_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} = -\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} \\ \Delta g &= -\frac{3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} + 3 \cdot \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} = \\ &= -\frac{3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} + 3 \cdot \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

In die Formel von Gauß-Green (1.1) eingesetzt erhält man folgenden Zusammenhang:

$$\oint_{\|\mathbf{x}\|=1} \left(f(\mathbf{x}) \text{grad } g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \text{grad } f(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{o}(\mathbf{x}) = 4\pi f(\mathbf{x}_0), \quad (3.27)$$

indem wir denselben Grenzübergang wie im Abschnitt 1.6.3 ausführen. Analog zum Zweidimensionalen wollen wir uns ein Integral erarbeiten, bei dem der Ausdruck $g(\mathbf{x}) \text{grad } f(\mathbf{x})$ wegfällt. Dazu ist es wieder nötig eine Funktion h zu finden, die auf der Kugeloberfläche die selben Werte wie g annimmt, aber keine Singularität in \mathbf{x}_0 für $\|\mathbf{x}_0\| < 1$ aufweist. Dafür definiert man ähnlich wie im \mathbb{R}^2 einen Punkt außerhalb der Kugel $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2}$, also gilt $\|\tilde{\mathbf{x}}_0\| > 1$. Für $\|\mathbf{x}\| = 1$ gilt dann $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|$ und man kann die Funktion h folgendermaßen definieren:

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|} \quad (3.28)$$

Für $\|\mathbf{x}\| = 1$ gilt dann $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ und die Funktion h ist für alle \mathbf{x} mit $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ definiert. Für die Vorstellung kann man mit Abbildung 3.1.2 vergleichen.

Nun setzt man die Formel von Gauß-Green (1.1) mit f und h an:

$$\oint_{\|\mathbf{x}\|=1} (f \text{grad } h - h \text{grad } f) d\mathbf{o} = \iiint_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} (f \underbrace{\Delta h}_{=0} - h \underbrace{\Delta f}_{=0}) dx dy dz = 0 \quad (3.29)$$

Und subtrahiert die Gleichung (3.29) von der Gleichung (3.27):

$$\begin{aligned} \oint_{\|\mathbf{x}\|=1} (f \operatorname{grad}(g-h) - \underbrace{(g-h)}_{=0 \text{ für } \|\mathbf{x}\|=1} \operatorname{grad} f) d\mathbf{o} &= 4\pi f(\mathbf{x}_0) \\ f(x_0) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\|\mathbf{x}\|=1} f(\mathbf{x}) \operatorname{grad}(g(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})) d\mathbf{o}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Um die Integralformel noch kompakter zu gestalten, berechnen wir noch den Gradienten. Die Voraussetzungen dafür sind: $\|\mathbf{x}\| = 1$: und $\mathbf{n} = \mathbf{x}$ auf der Kugeloberfläche.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(g(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}))\mathbf{n} &= \operatorname{grad}(g(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}))\mathbf{x} = \\ &= \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} - \frac{\|\mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x}_0\|^3} \cdot \frac{\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0}{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_0\|^3} \right) \mathbf{x} = \\ &= \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle - \|\mathbf{x}_0\|^2 \cdot \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \|\mathbf{x}_0\|^2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} = \\ &= \frac{1 - \|\mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Damit erhält man die Poissonsche Integralformel, welche die Potentialgleichung im Dreidimensionalen löst:

$$f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\|\mathbf{x}\|=1} f(\mathbf{x}) \frac{1 - \|\mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} d\mathbf{o}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\|\mathbf{x}\|=1} F(\mathbf{x}) \frac{1 - \|\mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} d\mathbf{o}(\mathbf{x}) \quad (3.32)$$

Die Funktion F bezeichnet dabei die Einschränkung der Funktion f auf die Sphäre \mathbb{S}^2 , bzw. die Randwerte aus der gegebenen Randbedingung.

3.2.2 Legendre-Polynome

Im Zweidimensionalen wurde zuerst die Lösungsmöglichkeit mittels Fourier-Reihen erarbeitet, um dann mittels der Gauß-Green Formel die Poissonsche Integralformel zu ermitteln.

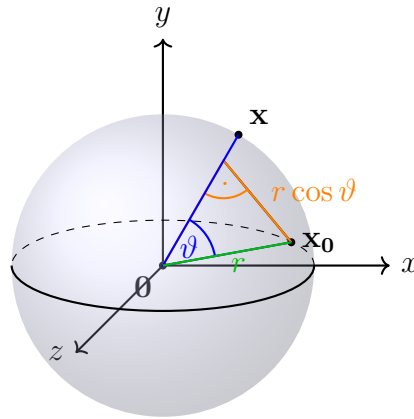
Im Dreidimensionalen wurde diese Idee aus dem Zweidimensionalen aufgegriffen die Poissonsche Integralformel zu entwickeln. Für \mathbb{R}^3 gibt es noch eine analoge Lösungsmöglichkeit ähnlich der Fourier-Reihen, welche nun weiter verfolgt wird.

Um dorthin zu gelangen setzen wir mit den Erkenntnissen gegen Ende des letzten Abschnitts mittels Parametrisierung nach Polarkoordinaten fort:

$$\frac{1 - \|\mathbf{x}_0\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} = \frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.33)$$

Wobei \mathbf{x} mit $\|\mathbf{x}\| = 1$ ein Punkt auf der Kugeloberfläche und \mathbf{x}_0 mit $r = \|\mathbf{x}_0\| < 1$ ein Punkt im Inneren der Kugel ist. Für den Nenner kann man eine kurze Rechnung führen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3 &= (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)^{\frac{3}{2}} = (\|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle + \|\mathbf{x}_0\|^2)^{\frac{3}{2}} = \\ &= (1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Abbildung 3.2.1: Skalarprodukt zwischen den Punkten \mathbf{x} und \mathbf{x}_0 : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle = r \cos \vartheta$

Betrachten wir zuerst einmal den Fall $\vartheta = 0$:

$$\frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - r^2}{(1 - 2r + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - r^2}{((r - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(r + 1)(r - 1)}{(r - 1)^3} = \frac{1 + r}{(1 - r)^2}$$

Wir suchen nun eine Reihendarstellung für diesen Ausdruck

$$\frac{1 + r}{(1 - r)^2} = \frac{1}{1 - r} + \frac{2r}{(1 - r)^2}.$$

Die erste Summand ist einfach eine geometrische Reihe, also

$$\frac{1}{1 - r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Indem wir diese differenzieren und mit r multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{r}{(1 - r)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n r^n.$$

Zusammen ergibt das

$$\frac{1 + r}{(1 - r)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) r^n.$$

Die Reihe für den allgemeinen Fall beinhaltet noch die Legendre-Polynome P_n :

$$\frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2n + 1)}_{\substack{\text{Normierung} \\ \text{für } \vartheta = 0}} P_n(\cos \vartheta) r^n \quad (3.35)$$

Zu dieser Reihe gelangt man durch das Entwickeln des Bruches mittels der Taylorformel, Differenzieren und Einsetzen. In diesem Rahmen genügt es allerdings die Zusammenhänge qualitativ zu verstehen. Im n -ten Entwicklungsschritt des Bruches gelangt man zu Potenzen α von $\cos \vartheta$, für die sicher $\alpha \leq n$ gilt. Daher muss $P_n(\cos \vartheta)$ ein Polynom mit Grad n von $\cos \vartheta$ sein.

Bemerkung 21. Es gilt natürlich $P_n(\cos(0)) = P_n(1) = 1$, wie man in der Rechnung davor gesehen hat.

Setzt man $\vartheta = \pi$ so erhält man $P_n(\cos \pi) = P_n(-1) = (-1)^n$. Weiters ist folgender Zusammenhang einleuchtend: $P_n(-\cos \vartheta) = (-1)^n P_n(\cos \vartheta)$

Statt $P_n(\cos \vartheta)$ stand im Zweidimensionalen $2 \cos(n\vartheta)$.

Es gibt zwei Möglichkeiten die Legendre-Polynome zu berechnen. Die eine ist durch die Rekursion

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1} ((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

und die andere mittels der sogenannten Rodrigues-Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n \quad (3.36)$$

Zumindest die ersten drei Folgenglieder sollten berechnet werden:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{1}{2^0 0!} \left(\frac{d}{dx} \right)^0 (x^2 - 1)^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\ P_1(x) &= \frac{1}{2^1 1!} \left(\frac{d}{dx} \right)^1 (x^2 - 1)^1 = \frac{1}{2} 2x = x \\ &\Rightarrow P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta \\ P_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} (2(x^2 - 1) \cdot 2x) = \\ &= \frac{1}{8} \frac{d}{dx} (4x^3 - 2x) = \frac{2}{8} (6x^2 - 2) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.2.3 Kugelflächenfunktionen

Nun müssen Funktionen gefunden werden, die dem auf der Kugeloberfläche entsprechen, was Sinus und Cosinus im Zweidimensionalen bewerkstelligen.

Erinnerung 6. Homogen vom Grad n bedeutet: $p(rx, ry, rz) = r^n p(x, y, z)$.

Erinnerung 7. Ein kurzer Rückblick wie sich der Sachverhalt im Zweidimensionalen darstellt. Die zwei Lösungen aus denen die Gesamtlösung aufgebaut wurde waren dort:

$$\begin{aligned} r^n \cos(n\varphi) &= \Re\{(x + iy)^n\} \\ r^n \sin(n\varphi) &= \Im\{(x + iy)^n\} \end{aligned}$$

Wobei diese Funktionen die Laplace-Gleichung erfüllen:

$$\Delta(x + iy)^n = 0$$

Daher sind diese Funktionen homogene harmonische Polynome vom Grad n in x und y . Die Funktionen $r^n \sin(n\varphi)$ und $r^n \cos(n\varphi)$ bilden eine Basis des Raumes der homogenen harmonischen Polynome vom Grad n im \mathbb{R}^2 .

Die beiden Funktionen kann man auch so verstehen, dass man von der Gesamtheit der homogenen harmonischen Polynome vom Grad n ausgeht und diese nur auf der Kreislinie betrachtet.

Also sind $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ Einschränkungen von homogenen harmonischen Polynome auf die Kreislinie. Diese beiden Funktionen bilden eine Basis aller Einschränkungen homogener harmonischer Polynome vom Grad n .

So kann das auch in drei Dimensionen betrachtet werden.

Man nimmt homogene harmonische Polynome von einem gewissen Grad und betrachtet diese nur auf der Kugeloberfläche. Die Einschränkung von homogenen harmonischen Polynomen auf die Sphäre nennt man **Kugelflächenfunktionen**.

Die hier verwendete Variante ist, dass dies Funktionen von x , y und z sind, wobei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gilt. Die Alternative wäre sie als Funktionen der Kugelkoordinaten φ und ϑ anzusehen, was im weiteren Verlauf aber unübersichtlich werden würde. Gelegentlich werden wir aber in der Schreibweise die Abhängigkeit von ϑ und φ betonen.

Sei also H_n der Raum der homogenen harmonischen Polynome vom Grad n in x , y und z . Betrachten wir ein Polynom aus diesem Raum $p \in H_n$:

$$p(x, y, z) = \sum_{k=0}^n x^k q_{n-k}(y, z). \quad (3.38)$$

Es handelt sich bei $q_{n-k}(y, z)$ um ein homogenes Polynom vom Grad $n - k$ in den Variablen y und z . Das Polynom p soll die Laplace-Gleichung erfüllen, wobei wir benützen, dass der Laplace-Operator auf die drei Variablen x , y und z unabhängig voneinander wirkt.

$$\Delta p = \sum_{k=0}^n k(k-1)x^{k-2}q_{n-k}(y, z) + \sum_{k=0}^n x^k \Delta q_{n-k}(y, z) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.39)$$

Gestalten wir die Summe etwas um:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n k(k-1)x^{k-2}q_{n-k}(y, z) + \sum_{k=0}^n x^k \Delta q_{n-k}(y, z) = \\
& = 0(-1)x^{-2}q_n(y, z) + 1(0)x^{-1}q_{n-1}(y, z) + \sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2}q_{n-k}(y, z) + \\
& + \sum_{k=0}^n x^k \Delta q_{n-k}(y, z) = \sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2}q_{n-k}(y, z) + \sum_{k=0}^n x^k \Delta q_{n-k}(y, z) = \\
& = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)x^k q_{n-k-2}(y, z) + \sum_{k=0}^{n-2} x^k \Delta q_{n-k}(y, z) + \\
& + x^{n-1} \Delta q_{n-n+1}(y, z) + x^n \Delta q_{n-n}(y, z) = \\
& = \sum_{k=0}^{n-2} x^k \left((k+2)(k+1)q_{n-k-2}(y, z) + \Delta q_{n-k}(y, z) \right) + \\
& + x^{n-1} \underbrace{\Delta q_1(y, z)}_{=0} + x^n \underbrace{\Delta q_0(y, z)}_{=0} \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Es muss also $(k+2)(k+1)q_{n-k-2}(y, z) + \Delta q_{n-k}(y, z) = 0$ für $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ gelten. Betrachten wir die ersten zwei Werte für k .

$$\begin{aligned}
k=0: & \quad 2 q_{n-2}(y, z) = -\Delta q_n(y, z) \\
k=1: & \quad 6 q_{n-3}(y, z) = -\Delta q_{n-1}(y, z)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Das bedeutet, dass durch die Wahl der Polynome q_n und q_{n-1} alle anderen Polynome festgelegt sind. Jetzt brauchen wir nur noch herauszufinden, wie viele linear unabhängige Polynome es vom Grad n gibt.

$$\underbrace{y^n, y^{n-1}z, y^{n-2}z^2, \dots, y z^{n-1}, z^n}_{n+1} \tag{3.42}$$

Daraus folgt, dass die Dimension von H_n gleich $n + (n+1) = 2n+1$ ist. Im weiteren Verlauf stellen wir uns die Funktionen in diesem Raum immer auf die Kugeloberfläche eingeschränkt vor.

Wir wollen nun diese Polynome besser verstehen. Dazu wählen wir $Y_n \in H_n$ und $Y_m \in H_m$ mit $n \neq m$ und wenden darauf die Formel von Gauß-Green (1.1) an:

$$\oint_{\|\mathbf{x}\|=1} (Y_n \operatorname{grad} Y_m - Y_m \operatorname{grad} Y_n) d\mathbf{o} = \iiint_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} (Y_n \underbrace{\Delta Y_m}_{=0} - Y_m \underbrace{\Delta Y_n}_{=0}) dx dy dz = 0 \tag{3.43}$$

Nun betrachten wir weiter die linke Seite dieser Gleichung, wobei $d\mathbf{o} = \mathbf{x} d\mathbf{o}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \oint_{\|\mathbf{x}\|=1} Y_n \langle \operatorname{grad} Y_m, \mathbf{x} \rangle - Y_m \langle \operatorname{grad} Y_n, \mathbf{x} \rangle d\mathbf{o}(\mathbf{x}) = \\
& = \underbrace{(m-n)}_{\neq 0} \oint_{\|\mathbf{x}\|=1} Y_n Y_m d\mathbf{o}(\mathbf{x}) = 0 \\
& \Rightarrow \oint_{\|\mathbf{x}\|=1} Y_n Y_m d\mathbf{o}(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Dafür wurde der Zusammenhang $\langle \text{grad } Y_n, \mathbf{x} \rangle = x \frac{\partial Y_m}{\partial x} + y \frac{\partial Y_m}{\partial y} + z \frac{\partial Y_m}{\partial z} = m Y_m$ verwendet.

Das bedeutet, dass für $n \neq m$, $Y_n \in H_n$ und $Y_m \in H_m$ die Funktionen Y_n und Y_m orthogonal aufeinander stehen. Dies entspricht der Idee der Fourier-Reihe im Zweidimensionalen.

Erinnerung 8. Im \mathbb{R}^2 wurden Integrale folgender Form verwendet:

Für $m \neq n$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi = 0$$

(3.45)

Wenn $m = n$:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(n\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2(n\varphi) d\varphi = \pi$$

Wir wählen eine Basis von H_n , nämlich $Y_{n,j}$ mit $j = -n, \dots, n$, das sind $2n + 1$ Werte. Diese Konvention kommt über eine Anschauung aus der Physik. Im physikalischen Zusammenhang wird n als **Nebenquantenzahl** bezeichnet, diese beschreibt die Form des Orbitals. Der Index j (für eine spezielle Wahl der Basis) heißt dann **Magnetquantenzahl** und beschreibt die räumliche Orientierung des Elektronen-Bahndrehimpulses.

Im weiteren Verlauf bedeutet das Symbol \mathbb{S}^2 die Sphäre. Außerdem wählen wir die Basis $Y_{n,j}$ so, dass

$$\oint_{\mathbb{S}^2} Y_{n,j}(\mathbf{x}) Y_{n,k}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4\pi & \text{wenn } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.46)$$

gilt. Das kann mittels des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt aus der Mathematik A erreicht werden.

Dabei steckt in der Wahl der Basis $Y_{n,j}$ wegen der höheren Dimension des Raumes H_n deutlich mehr Freiheit als im zweidimensionalen Fall. Für den weiteren Verlauf sehen wir eine solche Orthonormalbasis als gegeben an. Nun schreibt man diese Funktionen in einen Vektor, wobei A als Matrix eine Drehung repräsentiert.

$$\begin{pmatrix} Y_{n,-n}(A\mathbf{x}) \\ Y_{n,-n+1}(A\mathbf{x}) \\ \vdots \\ Y_{n,n-1}(A\mathbf{x}) \\ Y_{n,n}(A\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Durch verschiedene Drehungen entstehen verschiedene Orthonormalbasen von H_n , wodurch sich aber folgende Bedingung nicht ändert:

$$\oint_{\mathbb{S}^2} Y_{n,j}(A\mathbf{x})Y_{n,k}(A\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4\pi & \text{wenn } j = k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.48)$$

weil das Oberflächenmaß rotationsinvariant ist. Die Orthonormalbasen $Y_{n,j}(\mathbf{x})$ und $Y_{n,j}(A\mathbf{x})$ müssen also durch eine Drehung auseinander hervorgehen:

$$\begin{pmatrix} Y_{n,-n}(A\mathbf{x}) \\ Y_{n,-n+1}(A\mathbf{x}) \\ \vdots \\ Y_{n,n-1}(A\mathbf{x}) \\ Y_{n,n}(A\mathbf{x}) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} Y_{n,-n}(\mathbf{x}) \\ Y_{n,-n+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ Y_{n,n-1}(\mathbf{x}) \\ Y_{n,n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Wobei B eine Drehmatrix für den \mathbb{R}^{2n+1} ist. Eine Drehung bedeutet, dass die Längen der Vektoren und die Winkel zwischen Vektoren erhalten bleiben. Winkelgleichheit bedeutet, dass der Wert des Skalarproduktes erhalten bleibt:

$$F(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \sum_{j=-n}^n Y_{n,j}(A\mathbf{x})Y_{n,j}(A\mathbf{y}) = \sum_{j=-n}^n Y_{n,j}(\mathbf{x})Y_{n,j}(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.50)$$

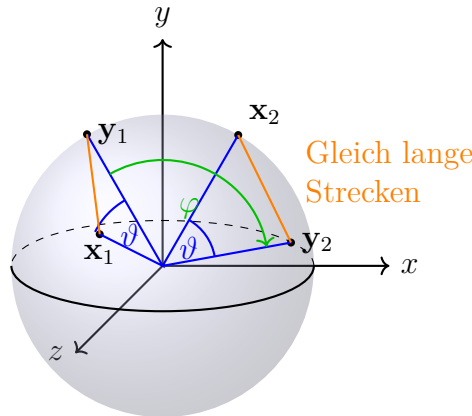


Abbildung 3.2.2: Invarianz einer Strecke und Winkel zwischen den Punkten \mathbf{x}_2 und \mathbf{y}_2 bezüglich einer Drehung.

Daher muss $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eine Funktion sein, die nur vom Skalarprodukt der beiden Vektoren abhängt. Außerdem ist F ein Polynom vom Grad n , weil ja $Y_{n,j}$ Polynome sind.

$$\sum_{j=-n}^n Y_{n,j}(\mathbf{x})Y_{n,j}(\mathbf{y}) = (2n+1)Q_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \quad (3.51)$$

Wir wollen zeigen, $Q_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$ das Legendre-Polynom ist. Dazu zeigen wir, dass die Polynome Q_n orthogonal sind. Dafür setzt man den Vektor \mathbf{y} in den Nordpol der Einheitskugel,

indem wir eine geeignete Drehung anwenden. Es ist noch zu erwähnen, dass $n \neq m$ gilt.

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{S}^2} (2m+1)Q_m(\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \rangle) (2n+1)Q_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \rangle) d\sigma(\mathbf{x}) = \\ & = \iint_{\mathbb{S}^2} \left(\sum_{j=-m}^m Y_{m,j}(\mathbf{x}) Y_{m,j}(\mathbf{e}_3) \right) \left(\sum_{k=-n}^n Y_{n,k}(\mathbf{x}) Y_{n,k}(\mathbf{e}_3) \right) d\sigma(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Weil die Integration des Produkts zweier sphärisch harmonischer Funktionen von verschiedenem Grad Null ergibt. Um sich das Integral genauer anzuschauen führen wir sphärische Polarkoordinaten ein, wobei $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \rangle = \cos \vartheta$ ist. Das ist unabhängig vom Winkel φ .

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\mathbb{S}^2} (2m+1)Q_m(\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \rangle) (2n+1)Q_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \rangle) d\sigma(\mathbf{x}) = \\ &= (2m+1)(2n+1) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} Q_m(\cos \vartheta) Q_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= (2m+1)(2n+1) \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} Q_m(\cos \vartheta) Q_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ \text{Substituiere:} \quad & t = \cos \vartheta \quad dt = -\sin \vartheta d\vartheta \\ &= (2m+1)(2n+1) \cdot 2\pi \cdot \int_{-1}^1 Q_m(t) Q_n(t) dt \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-1}^1 Q_m(t) Q_n(t) dt = 0.$$

Also erfüllen die Polynome Q_n die Orthogonalitätseigenschaft. Daher handelt es sich um Vielfache der Legendre-Polynoms: $Q_n(t) = c_n \cdot P_n(t)$. Dabei ist c_n eine Konstante, die im Folgenden ermittelt wird. Aus der folgenden Tatsache

$$\sum_{j=-n}^n Y_{n,j}(\mathbf{x}) Y_{n,j}(\mathbf{y}) = (2n+1)Q_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$$

Ergibt sich für $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\sum_{j=-n}^n \left(Y_{n,j}(\mathbf{x}) \right)^2 = (2n+1)Q_n(1) = (2n+1) \cdot c_n \cdot P_n(1)$$

Wenn wir diese Gleichung nun integrieren und die Orthonormalität von $Y_{n,j}$ verwenden, erhalten wir

$$4\pi \cdot (2n+1) \cdot c_n \cdot P_n(1) = \iint_{\mathbb{S}^2} \sum_{j=-n}^n \left(Y_{n,j}(\mathbf{x}) \right)^2 d\sigma(\mathbf{x}) = 4\pi \cdot (2n+1)$$

Weil nun $P_n(1) = 1$ ist, gilt tatsächlich $c_n = 1$. Mit diesen Erkenntnissen kann folgender Zusammenhang hergestellt werden.

Satz 4 (Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen).

$$\sum_{j=-n}^n Y_{n,j}(\mathbf{x}) Y_{n,j}(\mathbf{y}) = (2n+1) \cdot P_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \quad (3.53)$$

Wobei es sich bei P_n um das Legendre-Polynom handelt.

Bemerkung 22. Ziehen wir die Analogie zum Zweidimensionalen, dort gibt es nur die beiden Funktionen Sinus und Cosinus als Basis der „Kreislinienfunktionen“. Dabei gilt eine ähnlich Formel, allerdings nur mit zwei Summanden.

$$\cos(n\varphi) \cos(n\psi) + \sin(n\varphi) \sin(n\psi) = \cos(n(\varphi - \psi)) = T_n(\cos(\varphi - \psi)) = T_n(\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle)$$

Weil folgender Zusammenhang gilt:

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos(\varphi) \cos(\psi) + \sin(\varphi) \sin(\psi) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$$

Dabei heißt T_n das Tschebyscheff-Polynom.

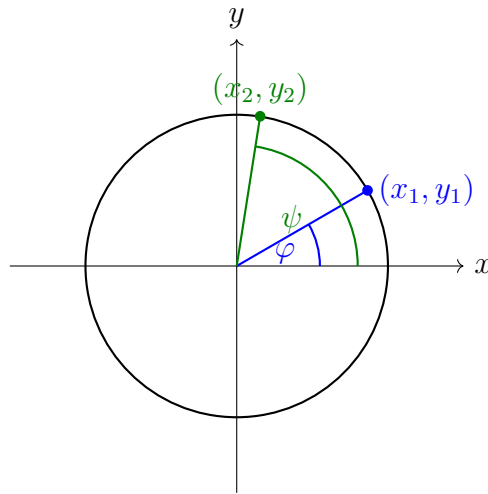


Abbildung 3.2.3: Die Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und ihre Winkel φ, ψ .

Mit dem Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen kann im Dreidimensionalen die Entsprechung zu den Fourier-Reihen im Zweidimensionalen hergestellt werden.

Die Kugelflächenfunktionen bilden nun tatsächlich ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbert-Raumes der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Sphäre \mathbb{S}^2 . Damit können wir jede Funktion $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in der Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^n a_{n,j} Y_{n,j}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(f)(\mathbf{x}) \quad (3.54)$$

darstellen, wobei die Koeffizienten durch die Formel

$$a_{n,j} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} f(\mathbf{x}) Y_{n,j}(\mathbf{x}) \, d\sigma(\mathbf{x}) \quad (3.55)$$

berechnet werden können. Die Konvergenz der Reihe ist wie im Fall der klassischen Fourier-Reihen im Sinne der Norm zu verstehen.

Die Funktion $Y_n(f)$ in (3.54) ist dabei der Anteil von f im Raum H_n , also eine Kugelflächenfunktion der Ordnung n . Für diese gibt es eine einfache Formel, nämlich die **Funk-Hecke-Formel**

$$Y_n(f)(\mathbf{x}) = \frac{2n+1}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} f(\mathbf{y}) P_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \, d\sigma(\mathbf{y}). \quad (3.56)$$

Dies kann man durch folgende Rechnung sehen

$$\begin{aligned} Y_n(f)(\mathbf{x}) &= \sum_{j=-n}^n \left(\underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} f(\mathbf{y}) Y_{n,j}(\mathbf{y}) \, d\sigma(\mathbf{y})}_{a_{n,j}} \right) Y_{n,j}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} f(\mathbf{y}) \sum_{j=-n}^n Y_{n,j}(\mathbf{y}) Y_{n,j}(\mathbf{x}) \, d\sigma(\mathbf{y}) \\ &= \frac{2n+1}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} f(\mathbf{y}) P_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \, d\sigma(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile das Additionstheorem (3.53) verwendet wurde.

Bemerkung 23. Der Laplace-Operator im \mathbb{R}^3 kann in Polarkoordinaten in der Form

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right)$$

geschrieben werden. Um den komplizierten Anteil mit der Abhängigkeit von ϑ und φ abzukürzen schreiben wir dafür

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} f.$$

Sei nun $f(r\mathbf{x}) = r^n Y_{n,j}(\mathbf{x})$ (für $\|\mathbf{x}\| = 1$) ein homogenes harmonisches Polynom vom Grad n . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta f &= 0 = Y_{n,j}(\vartheta, \varphi) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial r^n}{\partial r} \right) + r^{n-2} \Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{n,j}(\vartheta, \varphi) \\ &= r^{n-2} (n(n+1) Y_{n,j}(\vartheta, \varphi) + \Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{n,j}(\vartheta, \varphi)) \end{aligned}$$

oder anders geschrieben

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} Y_{n,j}(\vartheta, \varphi) = -n(n+1)Y_{n,j}(\vartheta, \varphi),$$

die Kugelflächenfunktionen sind die Eigenfunktionen des **sphärischen Laplace-Operators** $\Delta_{\vartheta,\varphi}$ zu den Eigenwerten $-n(n+1)$.

3.2.4 Abschluss

Zur Lösung der Potentialgleichung im \mathbb{R}^3 fehlt noch die Berücksichtigung des radialen Anteils für $r < 1$. Ausgehend von den Formeln (3.54) und (3.56) aus dem vorigen Abschnitt erhält man:

$$\begin{aligned} f(r\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(f)(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{2n+1}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} f(\mathbf{y}) P_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) d\sigma(\mathbf{y}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbb{S}^2} \sum_{n=0}^{\infty} r^n (2n+1) P_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) f(\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Hierbei entspricht der Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} r^n (2n+1) P_n(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$ dem Ausdruck für die Poissonsche Integralformel im Zweidimensionalen: $\frac{1-r^2}{(1-2r\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + r^2)^{\frac{3}{2}}}$. In dem Ausdruck ist $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ der Cosinus vom Winkel der Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} .

Bedeutung für die Elektrotechnik

Wenn man mit Φ das elektrische Potential bezeichnet, dann erhält man das elektrische Feld mittels $-\text{grad } \Phi = \mathbf{E}$ und die Ladungsdichte mittels $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Das bedeutet, dass der Zusammenhang $\Delta\phi = \text{div grad } \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ besteht.

Also beschreibt $\Delta\Phi = 0$ das elektrische Potential im ladungsfreien Raum. Unter der Voraussetzung, dass das elektrische Potential auf dem Rand einer Kugel bekannt ist, können so die Werte für das Potential im Inneren mithilfe der Poissonschen Integralformel bzw. alternativ als Überlagerung von Kugelflächenfunktionen berechnet werden.

3.3 Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir zwei partielle Differentialgleichungen untersuchen, die zeitabhängige physikalische Prozesse, nämlich die Wärmeausbreitung und die Schwingung von elastischen Medien, beschreiben. Auf diese lassen sich die bisher entwickelten Ideen, nämlich der Trennungsansatz und die Entwicklung von Angabedaten in Fourier-Reihen weiter gut anwenden. Wir werden aber sehen, dass wir auch ein paar Ideen entwickeln müssen.

3.4 Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten einen homogenen Körper $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Funktion

$$u : U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

deren Wert $u(\mathbf{x}, t)$ die Temperatur in $\mathbf{x} \in U$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bezeichnet. Um herauszufinden, welcher Gesetzmäßigkeit $u(\mathbf{x}, t)$ genügt, betrachten wir eine kleine Kugel $B(\mathbf{x}_0, r) \subseteq U$. Dann Berechnen wir den Wärmefluss durch den Rand von $B(\mathbf{x}_0, r)$ als

$$\oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \text{grad } u(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{o}(\mathbf{x}),$$

dabei bezeichnet grad den Gradienten bezüglich der Ortsvariablen. Wir nehmen dabei an, dass der Wärmefluss immer in Richtung des Temperaturgradienten erfolgt. Der Wärmefluss aus dem Bereich $B(\mathbf{x}_0, r)$ muss jetzt proportional zur Gesamtänderung der Temperatur in $B(\mathbf{x}_0, r)$, also

$$\iiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \, dx \, dy \, dz$$

sein. Damit haben wir eine Gleichung

$$a \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \text{grad } u(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{o}(\mathbf{x}) = \iiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \, dx \, dy \, dz,$$

wobei a eine materialabhängige Konstante bezeichnet. Um diese Gleichung noch etwas zu vereinfachen, wenden wir auf das Oberflächenintegral den Gaußschen Integralsatz an; das Ergebnis können wir dann gleich unter ein Volumensintegral schreiben:

$$\iiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} \left(a \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Diese Gleichung muss für alle $\mathbf{x}_0 \in U$ und alle hinreichend kleinen r gelten. Indem wir wieder Gebietsdifferentiation anwenden, erhalten wir daraus die Gleichung

$$a \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{3.58}$$

die Wärmeleitungsgleichung. Diese Gleichung beschreibt zuerst einmal die Ausbreitung der Wärme in U . Um ein konkretes physikalisches System zu beschreiben, brauchen wir noch zusätzliche Angabestücke:

- die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$, also die Funktion $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$, die **Anfangsbedingung** (AB)
- die Beschreibung des Austausches am Rand von U mit der Umgebung, also zum Beispiel

- $\forall \mathbf{x} \in \partial U : u(\mathbf{x}, t) = 0$ (U ist von einem Medium konstanter Temperatur 0 umgeben)
- $\forall \mathbf{x} \in \partial U : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0$, \mathbf{n} bezeichnet den Normalvektor auf ∂U (über den Rand von U findet kein Wärmefluss statt)
- diese zweite Bedingung wird **Randbedingung** (RB) genannt.

Durch die Angabe von Anfangs- und Randbedingung ist die Lösung $u(\mathbf{x}, t)$ eindeutig festgelegt. Im folgenden wollen wir für einige einfache Spezialfälle, vor allem für die eindimensionale Idealisierung des Problems, eine Lösungsmethode entwickeln.

3.4.1 Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Um die Lösungstheorie der Wärmeleitung besser zu verstehen, beginnen wir mit einer deutlichen Verinfachung des Problems. Wir nehmen an, dass die Wärmeverteilung räumlich nur von der Variablen x abhängt. Dies wäre etwa zur Beschreibung eines Stabes oder Drahtstückes passend, bei dem die Ausdehnung in einer Richtung deutlich größer als in den beiden anderen Richtungen ist, und die Wärmeverteilung über den Querschnitt als konstant angenommen werden kann.

3.4.2 Rechenschema der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

Für die Lösung der Wärmeleitungsgleichung gibt es ein Rechenschema in verschiedenen Varianten, die sich nur durch die vorgegebenen Randbedingungen unterscheiden. Wenn es nötig ist, muss das Rechenschema an die jeweilige Randbedingung angepasst werden. Die Vorgehensweise ist vom Prinzip her gleich, wie sie in der Variante „Nicht isoliert“ verwendet wird.

Nicht isoliert

Das Bild dazu ist ein Stab mit einer gegebenen Temperaturverteilung f zum Zeitpunkt $t = 0$, an dessen Rändern „Eisblöcke“ sitzen über die die Wärme über die Zeit hinaus fließt. Die Temperatur an den Punkten, an denen die „Eisblöcke“ sitzen wird $\forall t$ konstant auf 0 gehalten.



Abbildung 3.4.1: Beide Enden eines Stabes werden auf Temperatur 0 gehalten.

Dafür ist eine Funktion $u(x, t)$ für $0 \leq x \leq L$ gesucht, welche die Gleichung $au_{xx} = u_t$ erfüllt. Unter den Randbedingungen $u(0, t) = u(L, t) = 0, \forall t$ und unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ für $0 \leq x \leq L$.

Aus Sicht der Mathematik stellt sich die Frage, ob das überhaupt lösbar ist. Wenn ja, ist die Lösung eindeutig? Aus Sicht der Physik wird die Frage mit „ja“ beantwortet, weil diese Gleichung eine eindeutige Bedeutung hat, die aus der physikalischen Anschauung kommt.

Die Grundlage des Rechenschemas ist der Trennungsansatz. Wie bei den Potentialgleichungen versucht man viele elementare Lösungen zu finden, aus denen man die allgemeine Lösung zusammen setzt.

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= X(x) \cdot T(t) \\
 u_{xx} &= X''(x) \cdot T(t) \\
 u_t &= X(x) \cdot T'(t) \\
 au_{xx} &= u_t \\
 aX''(x) \cdot T(t) &= X(x) \cdot T'(t) \quad \left| : T(t) \cdot X(x) \right. \\
 a \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{T'(t)}{T(t)}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Man erkennt, dass die beiden Funktionen unabhängig voneinander variieren können und wenn man eine Variable betrachtet wirkt die Funktion über die andere Variable wie eine Konstante. Um die Rechnung nicht unnötig kompliziert zu machen, wird diese als $-\lambda^2 a$ beschrieben. Nun betrachtet man die Variablen separat voneinander. Starten wir zuerst mit x .

$$\begin{aligned}
 a \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\lambda^2 a \quad \left| \cdot \frac{X(x)}{a} \right. \\
 X''(x) &= -\lambda^2 X(x) \\
 X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Eine solche homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist aus der Mathematik B bekannt. Für sinnvolle Lösungen setzt man die Konstante als $-\lambda^2 a$ an und behandelt die Differentialgleichung dem Ansatz $X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$. Um sie zu lösen muss man die vorgegebenen Randbedingungen einsetzen.

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= 0 \quad \Rightarrow \\
 0 &= X(0) = A \cos(0 \cdot \lambda) + B \sin(0 \cdot \lambda) = A \cdot 1 + 0 = A \quad \Rightarrow \quad A = 0 \\
 X(x) &= B \sin(\lambda x) \\
 u(L, t) &= 0 \quad \Rightarrow \\
 0 &= X(L) = B \sin(\lambda L) \\
 0 &= \sin(\lambda L) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda L = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\pi n}{L}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir unendlich viele Lösungsfunktionen gefunden, aus denen wir die Gesamtlösung als Fourier-Reihe kombinieren können. Tatsächlich stellt sich heraus, dass

die Funktionen $X_n(x) = \sin(\frac{\pi nx}{L})$ ein vollständiges Orthogonalsystem in dem zugrunde liegenden Hilbert-Raum bilden. Wir können also die Ideen aus Kapitel 2 anwenden.

Fahren wir mit der Variablen t fort.

$$\begin{aligned} \frac{T'(t)}{T(t)} &= -\lambda^2 a & \Bigg| \cdot T(t) \\ T'(t) &= -\lambda^2 a T(t) \\ T'(t) + \lambda^2 a T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Diese homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist ebenfalls aus der Mathematik B bekannt. Die folgende Funktion ist eine Lösung dafür.

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a t} = e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a t}$$

Weil es sich um ein lineares Problem handelt gilt das Superpositionsprinzip. Man erhält die Gesamtlösung durch die Linearkombination aller Einzellösungen.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a t} \quad (3.62)$$

Die Koeffizienten b_n können mit der Methode der Fourier-Reihe ausgerechnet werden, wobei $f(x)$ die Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$ darstellt.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx \quad (3.63)$$

Beispiel 11. Gesucht ist die Lösung der Gleichung $u_{xx} = u_t$ mit den vorgegebenen Randbedingung $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\forall t$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \sin x = f(x)$.

Die Funktion der Anfangsbedingung besteht nur aus der Sinus-Funktion mit Frequenz 1, daher gilt $b_n = 1$ für $n = 1$, $b_n = 0$ für $n \neq 1$. $\lambda = 1$, weil die Länge $L = \pi$ beträgt. Daher ist die Gesamtlösung $u(x, t) = e^{-t} \sin(x)$

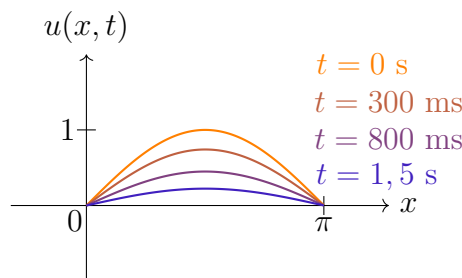


Abbildung 3.4.2: Änderung der Temperaturverteilung über die Zeit.

Beispiel 12. Gesucht ist die Lösung der Gleichung $u_{xx} = u_t$ mit den vorgegebenen Randbedingung $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\forall t$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = 5 \sin x + \sin(10x) = f(x)$.

Durch Ablesen mit freiem Auge kommt man zu den Koeffizienten $b_1 = 5$, $b_{10} = 1$ und zur Lösung $u(x, t) = 5e^{-t} \sin(x) + e^{-100t} \sin(10x)$. Dabei kann man erkennen, dass der hochfrequente Anteil schneller gegen Null geht, als der niederfrequente Anteil.

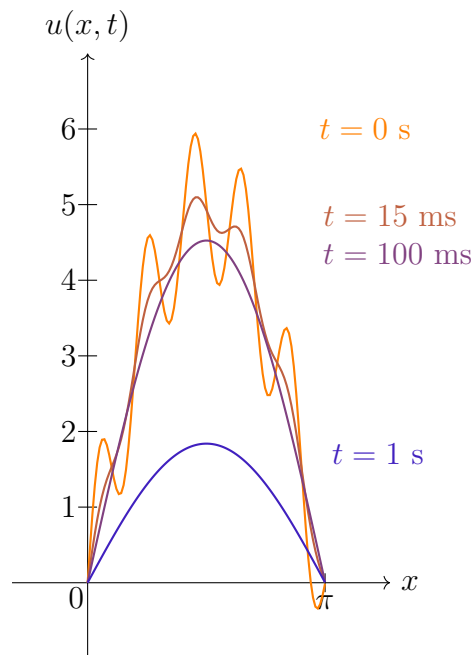


Abbildung 3.4.3: Änderung der Temperaturverteilung über die Zeit.

Beispiel 13. Praxisnahe Wir geben ein Toastbrot mit einer Dicke von 14 mm und einer Materialkonstante von $\kappa = a = 0,5 \text{ mm}^2/\text{s}$ in einen auf 220° C vorgeheizten Toaster. Wie wird sich die Temperatur im Inneren des Toasts über die Zeit verhalten?

Zur Funktion des Temperaturverhaltens über die Zeit kommt man über die Lösung der Gleichung $c^2 u_{xx} = u_t$. Wir haben die Randbedingungen $u(0, t) = u(L, t) = 220$ gegeben. Weil das Problem invariant ist kann das Temperaturverhalten über die Zeit grob mit $u(x, t) = 220 -$ „Temperatur im Toast“ beschrieben werden.

Wenn man davon ausgeht, dass der Toast zuvor Raumtemperatur 20° C hatte, so gilt die Temperaturverteilung $u(x, 0) = 200$ mit $0 < x < L = 14$ als Anfangsbedingung. Da wir alle nötigen Werte nun angegeben haben können wir direkt die Fourier-Koeffizienten

ausrechnen.

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$a_1 = \frac{4 \cdot 200}{\pi} \quad a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{4 \cdot 200}{3\pi} \quad a_4 = 0$$

$$\vdots$$

Dadurch gelangt man zur Lösung:

$$u(x, t) = 220 - \frac{800}{\pi} \exp\left(-0,5 \cdot \frac{\pi^2}{14^2} t\right) \sin\left(\frac{\pi}{14} x\right) -$$

$$- \frac{800}{3\pi} \exp\left(-0,5 \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi^2}{14^2} t\right) \sin\left(\frac{3\pi}{14} x\right) - \dots$$

Auch hier kann man erkennen, dass der hochfrequenter Anteil schneller gegen Null geht, als der niederfrequenter Anteil. Wenn man die Situation nach 10 s anschaut $t = 10$, stellt sie sich wie folgt dar:

$$u(x, 10) = 220 - \underbrace{\frac{800}{\pi} \exp\left(\underbrace{-0,5 \cdot \frac{\pi^2}{14^2} t}_{\approx -0,252}\right)}_{\approx 197,968} \sin\left(\frac{\pi}{14} x\right) -$$

$$- \underbrace{\frac{800}{3\pi} \exp\left(\underbrace{-0,5 \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi^2}{14^2} t}_{\approx -2,266}\right)}_{\approx 8,805} \sin\left(\frac{3\pi}{14} x\right) - \dots \quad (3.64)$$

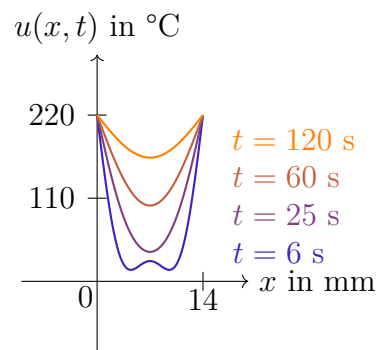


Abbildung 3.4.4: Änderung der Temperaturverteilung über die Zeit.

Damit würde es 3 Minuten brauchen, bis das Zentrum des Toastes weniger als 3° C kühler als 220° C ist.

Im vorigen Beispiel wurde eine Materialkonstante mit der Einheit mm^2 / s verwendet. Das liegt daran, dass folgende Einheiten für die Ableitungen gelten: u_{xx} in K / mm^2 und u_t in K / s .

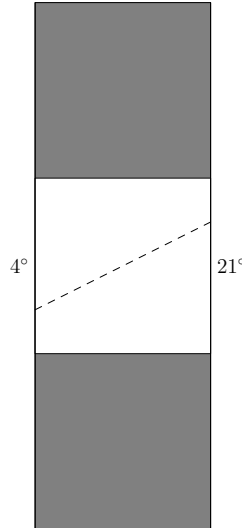


Abbildung 3.4.5: Temperaturverteilung in der Hausmauer im Gleichgewicht

Beispiel 14. Variation Was passiert, wenn beide Randbedingungen beliebig angenommen werden können? Das entsprechende Bild dazu wäre eine Hausmauer, die einen Übergang zwischen der Raumtemperatur im Inneren ($\approx 21^\circ \text{ C}$) und der Außentemperatur (z.B. 4° C) darstellt. Dafür muss diese Variante des Rechenschemas angepasst werden.

Es gilt nach wie vor eine Lösung für die Gleichung $au_{xx} = u_t$ zu finden. Unter den Randbedingungen gilt $u(0, t) = T_0$, $u(L, t) = T_L$ und unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$. Durch die physikalische Anschauung ist bekannt, wie sich die Temperatur nach langer Zeit einstellen wird. Die Temperatur wird von warm nach kalt linear abfallen. Daher kann man eine neue Funktion \tilde{u} mit folgendem Zusammenhang definieren.

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \frac{x}{L}(T_L - T_0) + T_0$$

Zur besseren Vorstellung des Temperaturübergangs kann man die Abbildung 3.4.5 betrachten.

Man stellt fest, dass $u_{xx} = \tilde{u}_{xx}$ und $u_t = \tilde{u}_t$ gilt. Durch die Definition von \tilde{u} ergibt sich eine neue Randbedingung:

$$\begin{aligned} u(0, t) = T_0 &= \tilde{u}(0, t) + T_0 & \tilde{u}(0, t) &= 0 \\ u(L, t) = T_L &= \tilde{u}(L, t) + T_L & \tilde{u}(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

Man schreibt die Anfangsbedingung um:

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0) + \frac{x}{L}(b - a) + a = f(x)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = f(x) - \frac{x}{L}(T_L - T_0) - T_0$$

Damit kann man das Problem $a\tilde{u}_{xx} = \tilde{u}_t$ lösen, wobei a die Materialkonstante des Übergangs (z.B. der Hausmauer) darstellt.

Bei dieser Variante des Rechenschemas wird der Wert an den Randpunkten der gegebenen Länge künstlich auf Null gehalten. Dennoch findet ein Wärmefluss über diese Punkte hinaus statt, der Temperaturgradient ist dort bei den hier verwendeten Beispielen nicht gleich Null. Die weiteren Varianten beschäftigen sich damit was passiert, wenn über einen oder beide Punkte kein Wärmefluss stattfinden kann. Man kann sich vorstellen, dass sich an den betreffenden Punkten Isolatoren sitzen, die einen Wärmefluss verhindern.

Rechtsseitig isoliert



Abbildung 3.4.6: Auf der linken Seite des Stabs sitzt ein „Eisblock“, auf der rechten Seite ein Isolator.

Es gilt nach wie vor $au_{xx} = u_t$ zu lösen. Die Ortsableitung am rechten Punkt muss gleich Null sein, weil dort kein Temperaturexchange stattfindet. Daher gelten die Randbedingungen $u(0, t) = 0$ und $u_x(L, t) = 0$. Die Anfangsbedingung lautet $u(x, 0) = f(x)$ für $0 \leq x \leq L$. Man verwendet wieder den Trennungsansatz mit $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, der zum Zusammenhang $a \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T} = -\lambda^2 a$ führt. Die Argumentation dafür wurde im vorigen Unterabschnitt „Nicht isoliert“ erläutert. Nun wird die räumliche Abhängigkeit untersucht. Dies ergibt die Gleichung

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

mit den Lösungen

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x),$$

die wir noch den Randbedingungen anpassen müssen: $X(0) = 0 = A$ eliminiert den cos-Term, $X'(L) = \lambda B \cos(\lambda L) = 0$ führt zur Gleichung

$$\cos(\lambda L) = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit haben wir wieder ein unendliches Funktionensystem

$$X_n(x) = b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)$$

gefunden, aus dem wir die Anfangsbedingungen als Fourier-Reihe linear kombinieren können. Das System ist tatsächlich wieder vollständig im Sinne von Abschnitt 2.2.

Und für die Zeitabhängigkeit gilt:

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda^2 a T &= 0 \\ T(t) &= e^{-\lambda^2 a t} = e^{-\frac{\pi^2}{L^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 a t} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Die Koeffizienten lassen sich über die Anfangsbedingung analog zur Methode der Fourier-Reihe ausrechnen:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) dx \quad (3.66)$$

Die Gesamtlösung lautet:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 a t} \quad (3.67)$$

Beispiel 15. Gesucht ist die Lösung der Gleichung $u_{xx} = u_t$ unter den Randbedingungen $u(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = 0$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$. Man kann direkt mit der Berechnung der Koeffizienten beginnen.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{x \left(-\frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{n + \frac{1}{2}} \right)}_{=0, \forall n \in \mathbb{N}} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{n + \frac{1}{2}} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)}_{=(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}} = \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot (-1)^n}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4} = \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten kann man die Gesamtlösung anschreiben:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) e^{-\frac{(2n+1)^2}{4} t}$$

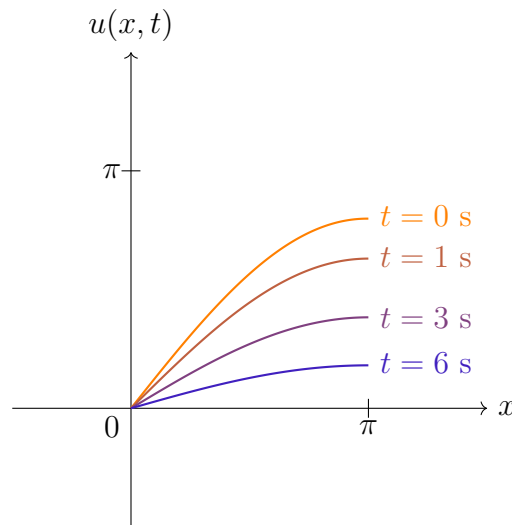


Abbildung 3.4.7: Änderung der Temperaturverteilung über die Zeit (Annäherung).

Linksseitig isoliert

Abbildung 3.4.8: Auf der linken Seite des Stabs sitzt ein Isolator, auf der rechten Seite ein „Eisblock“.

Gesucht ist die Lösung der Gleichung $au_{xx} = u_t$ mit den Randbedingungen $u_x(0, t) = u(L, t) = 0$ unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ auf $0 \leq x \leq L$. Der Trennungsansatz bringt uns auf den Zusammenhang $a \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2 a$. Zuerst wird die Raumabhängigkeit untersucht. Dies führt auf die Gleichung

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

mit den Lösungen

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x),$$

die wir wieder den Randbedingungen anpassen müssen: $X'(0) = 0 = \lambda B$ ergibt $B = 0$, $X(L) = 0 = A \cos(\lambda L)$ ergibt

$$\lambda = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir haben damit wieder ein unendliches Funktionensystem

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)$$

gefunden, aus dem wir die Anfangsbedingung als Fourier-Reihe darstellen können.

Für die Zeitabhängigkeit erhalten wir

$$T'(t) + \lambda^2 a T(t) = 0$$

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a t} = e^{-\frac{(2n+1)^2}{4L^2} \pi^2 a t}.$$

Die Koeffizientenformel ergibt sich als

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right) dx$$

und liefert die Gesamtlösung:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right) e^{-\frac{(2n+1)^2}{4L^2} \pi^2 a t}.$$

Vollständig isoliert



Abbildung 3.4.9: An beiden Enden des Stabs sitzt ein Isolator.

Gesucht ist die Lösung der Gleichung $au_{xx} = u_t$ mit den Randbedingungen $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ auf $0 \leq x \leq L$. Der Trennungsansatz bringt uns auf den Zusammenhang $a \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2 a$.

Wir behandeln wieder zuerst die Raumabhängigkeit:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

mit den Lösungen

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Die Anpassung an die Randbedingungen liefert $X'(0) = \lambda B = 0$, also $B = 0$, und $X'(L) = 0 = -\lambda A \sin(\lambda L)$, also

$$\sin(\lambda L) = 0, \quad \text{daher } \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit haben wir wieder ein vollständiges Orthogonalsystem von Funktionen

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

aus dem wir die Anfangsbedingung linear kombinieren können. Für die Zeitabhängigkeit erhalten wir

$$T'(t) + a\lambda^2 T(t) = 0$$

$$T(t) = e^{-a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Die Koeffizientenformeln

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

ergeben dann die Gesamtlösung:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

Beispiel 16. Gesucht ist die Lösung der Gleichung $u_{xx} = u_t$ mit den Randbedingungen $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$ unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = x$ auf $0 \leq x \leq \pi$. Wieder kann man direkt mit der Berechnung der Koeffizienten beginnen.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{x \frac{1}{n} \sin(nx)}_{=0, \forall n \in \mathbb{N}} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} \left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}} - \cos(0) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{für } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } n = 2k \end{cases}$$

Mit den Koeffizienten kann man die Gesamtlösung anschreiben:

$$u(x, t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) e^{-(2k+1)^2 t}$$

Zu beachten ist, dass als Argument im Cosinus und der Exponentialfunktion nur ungerade Terme vorkommen, weil die geraden Terme der Koeffizientenfolge Null sind. Weiters gilt in diesem Beispiel $a = 1$. Ist dafür ein anderer Wert angegeben, muss man das Argument der Exponentialfunktion entsprechend anpassen.

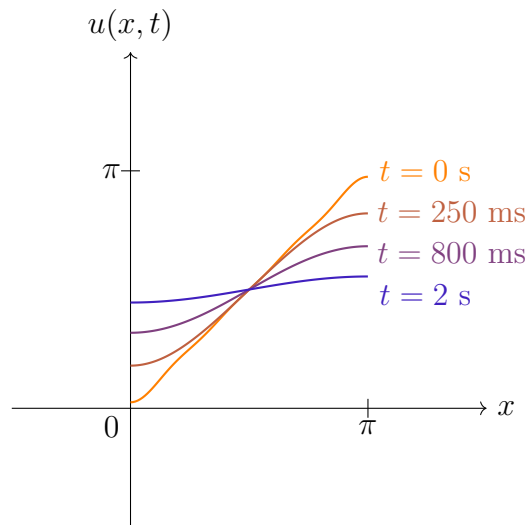


Abbildung 3.4.10: Änderung der Temperaturverteilung über die Zeit (Annäherung).

Zugegeben sind solche Wärmeleitungsgleichungen nicht ganz realistisch. Realistischer sind entsprechende Modelle für zwei oder drei Raumdimensionen.

3.4.3 Zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung

Allgemein

Wir wollen nun die Wärmeleitungsgleichung in zwei Dimensionen betrachten. Die Herleitung in Abschnitt 3.4 bleibt weiterhin gültig; wir können einfach die Abhängigkeit von der Variablen z unterdrücken, um die Wärmeausbreitung in einer dünnen Schicht (z.B. einem Blech) zu studieren. Für $u(x, y, t)$ mit $\mathbf{x} = (x, y) \in U$, die Temperatur in \mathbf{x} zum Zeitpunkt t , gilt dann die Gleichung

$$a\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.68)$$

Die Anfangsbedingung kann auch leicht formuliert werden, also

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in U.$$

Bei den Randbedingungen haben wir allerdings schon viel mehr Möglichkeiten. So kann die Temperatur auf dem gesamten Rand konstant gehalten werden, oder der gesamte Rand isoliert sein, man könnte aber auch Teile des Randes isolieren, und andere Teile auf konstanter Temperatur halten.

Wir wollen hier nur die zwei einfachsten Fälle studieren, nämlich

$$u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial U$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial U,$$

wobei \mathbf{n} den Normalenvektor auf ∂U in \mathbf{x} bezeichnet. Außerdem wollen wir nur „simple“ Gebiete U betrachten, nämlich Rechtecke und Kreisscheiben.

Die grundsätzliche Vorgehensweise zur Lösung von (3.68) kennen wir schon, nämlich die Trennung von Raum und Zeit. Wir suchen also Lösungen von (3.68) der Form

$$u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t);$$

für diesen Ansatz erhalten wir die Gleichung

$$aT\Delta X = XT' \quad \text{bzw.} \quad a \frac{\Delta X(\mathbf{x})}{X(\mathbf{x})} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Die linke Seite hängt nur vom Ort \mathbf{x} ab, die rechte Seite nur von t , beide Seiten müssen also konstant sein. Wieder stellt sich heraus, dass diese Konstante nur Werte ≤ 0 annehmen kann.

Damit haben wir zwei Gleichungen zu lösen, nämlich

$$\Delta X = -\lambda^2 X \tag{3.69}$$

für die Ortsabhängigkeit und

$$T' = -a\lambda^2 T$$

für die Zeitabhängigkeit. Die zweite Gleichung ist wieder einfach zu lösen, wir erhalten $T(t) = e^{-a\lambda^2 t}$. Welche Werte von λ tatsächlich vorkommen können, ergibt sich aus (3.69) unter Einbeziehung der Randbedingungen. Dabei stellt sich heraus, dass die Lösungen dieser Gleichung, die Eigenfunktionen des Laplace-Operators, ein vollständiges Orthogonalsystem im zugehörigen Hilbert-Raum $L^2(U)$ bilden. Ebenso stellt sich heraus, dass die Eigenwerte $-\lambda^2$ eine diskrete Menge bilden, und es zu jedem Eigenwert nur endlich viele Eigenfunktionen geben kann. Wir können also davon ausgehen, dass wir die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$$

durch eine Fourier-Reihe in den Eigenfunktionen $X_n(\mathbf{x})$ mit den Eigenwerten $-\lambda_n^2$ beschreiben können

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(\mathbf{x})$$

mit

$$a_n = \iint_U f(\mathbf{x}) X_n(\mathbf{x}) \, dx \, dy,$$

wenn

$$\iint_U X_n(\mathbf{x})^2 \, dx \, dy = 1$$

gilt. Die Konvergenz der Reihe ist wieder im Sinne des Hilbert-Raum Norm zu verstehen.

Unter Verwendung dieser Koeffizienten lässt sich die Lösung dann als

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(\mathbf{x}) e^{-\lambda_n^2 t}$$

darstellen. Für $t > 0$ konvergiert diese Reihe übrigens sehr schnell.

Rechteck

$$U = [0, L_1] \times [0, L_2] \quad (3.70)$$

Zu Lösen ist die Gleichung $a\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ unter der Randbedingung $u(0, y, t) = u(L_1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, L_2, t) = 0$. Es gilt daher $u = 0$ auf ∂U . Die Anfangsbedingung ist gegeben mit $u(x, y, 0) = f(x, y)$. Betrachten wir speziell die Raumabhängigkeit. Hier ist es so, dass auch die x - und y -Variable unabhängig voneinander sind und man dadurch die Variablen trennen kann.

$$X(x, y) = A(x) \cdot B(y)$$

$$\Delta X(x, y) = A''(x)B(y) + A(x)B''(y) = -\lambda^2 A(x)B(y) \quad \Bigg| : A(x)B(y)$$

$$\frac{A''(x)}{A(x)} + \frac{B''(y)}{B(y)} = -\lambda^2$$

Beide Variablen können unabhängig voneinander variieren, daher müssen die beiden Ausdrücke auf der linken Seite konstant sein. Mit dem folgenden Zusammenhang kann man die charakteristische Gleichung ansetzen:

$$\begin{aligned} A''(x) + \lambda_1^2 A(x) &= 0 \\ B''(y) + \lambda_2^2 B(y) &= 0 \\ -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 &= -\lambda^2 \end{aligned}$$

Und löst die einzelnen Differentialgleichungen in gewohnter Weise:

$$\begin{aligned} A(x) &= \alpha \cos(\lambda_1 x) + \beta \sin(\lambda_1 x) \\ B(y) &= \gamma \cos(\lambda_2 y) + \delta \sin(\lambda_2 y) \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen der Randbedingungen erhält man:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= A(0)B(y) = 0 = A(L_1)B(y) = u(L_1, y, t) \\ &\Rightarrow A(0) = 0 = A(L_1) \\ 0 &= A(0) = \alpha \cos(0) + \beta \sin(0) = \alpha \\ A(x) &= \beta \sin(\lambda_1 x) \\ 0 &= A(L_1) = \beta \sin(\lambda_1 L_1) \\ \sin(\lambda_1 L_1) &= 0 \quad \lambda_1 L_1 = k_1 \pi \quad \forall k_1 \in \mathbb{N} \\ u(x, 0, t) &= A(x)B(0) = 0 = A(x)B(L_2) = u(x, L_2, t) \\ &\Rightarrow B(0) = 0 = B(L_2) \\ 0 &= B(0) = \gamma \cos(0) + \delta \sin(0) = \gamma \\ B(y) &= \delta \sin(\lambda_2 y) \\ 0 &= B(L_2) = \delta \sin(\lambda_2 L_2) \\ \sin(\lambda_2 L_2) &= 0 \quad \lambda_2 L_2 = k_2 \pi \quad \forall k_2 \in \mathbb{N} \\ X_{k_1, k_2}(x, y) &= \sin\left(\frac{k_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi y}{L_2}\right) \\ \lambda^2 &= \left(\frac{k_1 \pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2 \pi}{L_2}\right)^2 \end{aligned}$$

Mit dem Lösungsansatz einer Sinus-Fourier-Reihe in den Variablen x und y für die gegebene Anfangsbedingung gelangt man zur Koeffizientenformel:

$$a_{n_1, n_2} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_{y=0}^{L_2} \int_{x=0}^{L_1} f(x, y) \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) dx dy$$

und zur Darstellung

$$f(x, y) = \sum_{k_2=1}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1, k_2} \sin\left(\frac{k_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi y}{L_2}\right)$$

für die Anfangsbedingung. Insgesamt ergibt sich dann die Gesamtlösung als

$$u(x, y, t) = \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1, n_2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) e^{-a\left(\left(\frac{n_1 \pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi}{L_2}\right)^2\right)t}$$

Kreisscheibe

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Als Randbedingung gilt $u(x, y, t) = 0$ für $x^2 + y^2 = 1$ und $t \geq 0$. Mit dem bereits mehrfach verwendeten Trennungsansatz ist auch die Zeitabhängigkeit dieselbe wie vorhin. Allerdings sind nun die Variablen x und y nicht mehr unabhängig voneinander. Für die Raumabhängigkeit ist nach wie vor $\Delta X(x, y) = -\lambda^2 X(x, y)$ zu lösen. Dafür wird die Funktion X in Polarkoordinaten transformiert, sodass sie von den Variablen r und φ abhängt.

$$\Delta X(r, \varphi) = \frac{\partial^2 X(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -\lambda^2 X(r, \varphi)$$

Nun kann man einen Trennungsansatz nach den Variablen r und φ machen:

$$X(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Einsetzen in die zuvor erhaltene Gleichung ergibt:

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = -\lambda^2 R(r)\Phi(\varphi) \quad \left| \cdot \frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)} \right.$$

$$\lambda^2 r^2 + r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

Die Variablen r und φ können wieder unabhängig voneinander variieren, damit müssen die beiden Seiten der letzten Gleichung konstant sein. Untersuchen wir zuerst die Winkelabhängigkeit.

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu^2$$

$$\Phi''(\varphi) = -\mu^2 \Phi(\varphi)$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0$$

Diese Gleichung haben wir bereits mehrfach studiert. Die Lösungen sind für $\mu > 0$ durch

$$\Phi(\varphi) = A \cos(\mu\varphi) + B \sin(\mu\varphi)$$

und für $\mu = 0$ durch

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi$$

gegeben. Die Funktion Φ muss periodisch mit Periode 2π sein, also muss $\mu \in \mathbb{N}_0$ sein. Für $\mu = 0$ muss außerdem der lineare Term verschwinden.

Nun untersuchen wir die radiale Abhängigkeit, wobei $\mu \in \mathbb{N}_0$ gilt. Aus den obigen Überlegungen erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda^2 r^2 + r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} - \mu^2 &= 0 \quad \Bigg| \cdot R(r) \\ r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda^2 r^2 - \mu^2) R(r) &= 0. \end{aligned}$$

Um diese zu vereinfachen, setzen wir $R(r) = \tilde{R}(\lambda r)$ und erhalten

$$\lambda^2 r^2 \tilde{R}''(\lambda r) + \lambda r \tilde{R}'(\lambda r) + (\lambda^2 r^2 - \mu^2) \tilde{R}(\lambda r) = 0.$$

In dieser Gleichung tritt r immer multipliziert mit λ auf, deswegen können wir die Gleichung auch als

$$r^2 \tilde{R}''(r) + \lambda r \tilde{R}'(r) + (r^2 - \mu^2) \tilde{R}(r) = 0. \quad (3.71)$$

schreiben. Diese Gleichung heißt die **Besselsche Differentialgleichung**. Eine Möglichkeit sie zu lösen besteht in einem Potenzreihenansatz (wir lassen jetzt die $\tilde{\cdot}$ weg). Wir setzen

$$\begin{aligned} R(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\alpha} \\ R'(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha) r^{n+\alpha-1} \\ R''(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) r^{n+\alpha-2} \end{aligned}$$

und versuchen zuerst α so zu bestimmen, dass wir $a_n \neq 0$ wählen können.

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) r^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha) r^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\alpha+2} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^2 r^{n+\alpha} = 0 \\ &\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left((n+\alpha)^2 - \mu^2 \right) r^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\alpha+2} = 0. \end{aligned}$$

In der ersten Summe tritt für $n = 0$ der Term $a_0(\alpha^2 - \mu^2)r^\alpha$ auf, der ansonsten nicht mehr vorkommt. Dieser Term muss also verschwinden; gleichzeitig soll $a_0 \neq 0$ sein. Daher muss

$$\alpha^2 - \mu^2 = 0$$

gelten, also $\alpha = \pm\mu$. Da die Funktion $R(r)$ für $r = 0$ stetig sein soll, muss $\alpha \geq 0$ gelten, also $\alpha = \mu$.

Eine einfache Wahl für die weiteren Betrachtungen ist $a_0 = 1$. Nun sehen wir uns an, wie die Situation für $r^{\alpha+1}$ aussieht:

$$r^{\alpha+1} : a_1 \underbrace{\left((\alpha+1)^2 - \mu^2 \right)}_{\neq 0} = 0$$

$$a_1 = 0$$

$(\alpha+1)^2 - \mu^2$ kann nicht gleich Null sein, weil $\alpha = \mu$ und daher $(\alpha+1)^2 > \mu^2$ gilt. Untersuchen wir auch noch die Zusammenhänge für ein allgemeines $n \geq 2$:

$$r^{n+\alpha} : \underbrace{a_n \left((n+\mu)^2 - \mu^2 \right)}_{\text{Erste Summe}} = a_n(n+2\mu)n = \underbrace{-a_{n-2}}_{\text{Zweite Summe}}$$

Daraus ergibt sich wegen $a_1 = 0$ sofort

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \dots$$

Die ungeraden Terme verschwinden also. Für die geraden Terme bleibt die Rekursion

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+2\mu)},$$

aus der wir (mit Induktion) ein Bildungsgesetz ablesen können

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\mu!}{4^n n! (n+\mu)!}.$$

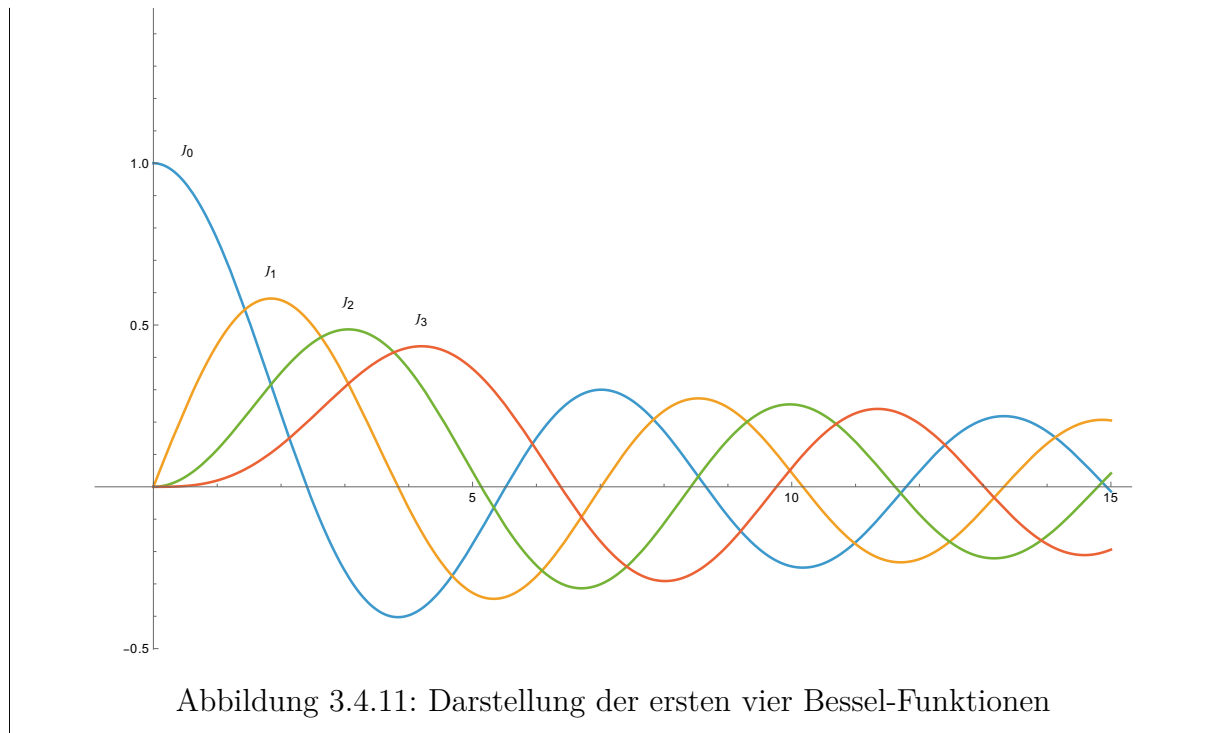
Daher ergibt sich als radiale Abhängigkeit:

$$R_\mu(r) = \mu! \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{2n+\mu}}{4^n n! (n+\mu)!}$$

Bemerkung 24. Die Funktion R_μ ist ein Vielfaches der Bessel-Funktion der Ordnung μ :

$$\mathcal{J}_\mu(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+\mu}}{n! (n+\mu)!} \quad (3.72)$$

Diese ist eine sogenannte spezielle Funktion und beschreibt die radiale Abhängigkeit der Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Kreisscheibe.



Wir kennen nun den Raumanteil der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf der zweidimensionalen Kreisscheibe:

$$u_\mu(r, \varphi) = \mathcal{J}_\mu(\lambda r) \left((a_\mu \cos(\mu\varphi) + b_\mu \sin(\mu\varphi)) \right) \quad \mu \in \mathbb{N}_0$$

Um die Randbedingung zu erfüllen, muss diese Funktion noch am Rand der Einheitskreisscheibe verschwinden. Dazu muss offenbar $\mathcal{J}_\mu(\lambda) = 0$ gelten. Die in Frage kommenden Werte für λ sind also die Nullstellen der Bessel-Funktion der Ordnung μ .

Nun können wir die Ansatzfunktion anschreiben:

$$f(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,0} \mathcal{J}_0(\lambda_{k,0} r) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}_\mu(\lambda_{k,\mu} r) \left(A_{k,\mu} \cos(\mu\varphi) + B_{k,\mu} \sin(\mu\varphi) \right)$$

Wobei $\lambda_{k,\mu}$ die k -te Nullstelle von \mathcal{J}_μ bezeichnet.

Das Lösungsschema dafür ist ebenfalls die Methode der Fourier-Reihe. Man schreibt die Funktion der Anfangsbedingung in dieser Form und bestimmt die Koeffizienten über Integrale. Allerdings ist diese Rechnung weniger gut handhabbar, weil sie die Funktionen \mathcal{J}_μ beinhaltet. Die Erfahrung aus dem bisher behandelten Stoff zeigt uns allerdings, dass wir lediglich die „richtigen“ Exponentialfunktionen dazu schreiben müssen, um zur Gesamtlösung zu gelangen.

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,0} \mathcal{J}_0(\lambda_{k,0} r) e^{-a\lambda_{k,0}^2 t} + \\ & + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}_\mu(\lambda_{k,\mu} r) \left(A_{k,\mu} \cos(\mu\varphi) + B_{k,\mu} \sin(\mu\varphi) \right) e^{-a\lambda_{k,\mu}^2 t} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dazu ist noch zu bemerken, dass die Winkelabhängigkeit aus gewöhnlichen Winkelfunktionen besteht.

3.4.4 Dreidimensionale Wärmeleitungsgleichung auf der Kugel

Wir wollen uns noch kurz ansehen, wie die Behandlung der Wärmeleitungsgleichung in drei Dimensionen aussieht. Dazu betrachten wir als Grundmenge die Einheitskugel $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Wir nehmen wieder an, dass die Temperatur auf dem Rand verschwindet.

Der Trennungsansatz führt wieder dazu, dass wir die Eigenwerte des Laplace-Operators, diesmal auf der Kugel, bestimmen müssen. Wir schreiben den Laplace-Operator in Polarkoordinaten und trennen zuerst in den radialen und den Winkelanteil $X(r, \vartheta, \varphi) = R(r)S(\vartheta, \varphi)$

Das setzt man in die Eigenwertgleichung ein:

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} X = R''(r)S(\vartheta, \varphi) + \frac{2}{r} R'(r)S(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{r^2} R(r) \Delta_{\vartheta, \varphi} S(\vartheta, \varphi) \\ &\stackrel{!}{=} -\lambda^2 R(r)S(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Damit können wir die radiale und die Winkelabhängigkeit trennen

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + 2r \frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Delta_{\vartheta, \varphi} S(\vartheta, \varphi)}{S(\vartheta, \varphi)}$$

und erhalten, dass beide Seiten dieser Gleichung konstant sein müssen.

Die Eigenwertgleichung des sphärischen Laplace-Operators

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} S(\vartheta, \varphi) = -\mu S(\vartheta, \varphi)$$

haben wir im Abschnitt 3.2.3 bereits gelöst. Die Eigenwerte sind die Werte $-n(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}_0$) und die Eigenfunktionen sind die Kugelflächenfunktionen $Y_{n,j}(\vartheta, \varphi)$ (diesmal in den Winkeln ausgedrückt).

Der radiale Anteil führt auf die Gleichung

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + 2r \frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda^2 r^2 - n(n+1) = 0.$$

Für die Lösung dieser Gleichung gehen wir ähnlich vor wie in zwei Dimensionen. Wir können durch Substitution $\lambda r \rightarrow r$ die Gleichung zu

$$r^2 \tilde{R}''(r) + 2r \tilde{R}'(r) + (r^2 - k(k+1)) \tilde{R}(r) = 0$$

vereinfachen.

Die Lösung dieser Differentialgleichung können wir durch Potenzreihenansatz gewinnen, ähnlich wie für die Bessel-Funktion im Zweidimensionalen. Die für drei Dimensionen entsprechende Reihe lautet:

$$y_k(r) = \frac{(2k+2)!}{(k+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k+1)!}{n!(2n+2k+2)} r^{2n+k} \quad (3.74)$$

Der Baustein für den radialen Anteil lautet also $R_k(r) = y_k(\lambda_{k,m}r)$. Dabei ist $\lambda_{k,m}$ die m -te Nullstelle von y_k . Tatsächlich handelt es sich bei y_k um elementare Funktionen, also Funktionen, die sich in Funktionen aus dem Vorrat der Mathematik A ausdrücken lassen. Als Beispiele zeigen wir die ersten drei dieser Funktionen

$$\begin{aligned} y_0(r) &= \frac{\sin(r)}{r} \\ y_1(r) &= 3 \frac{\sin(r) - r \cos(r)}{r^2} \\ y_2(r) &= 15 \frac{(3 - r^2) \sin(r) - 3r \cos(r)}{r^3}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend können wir die Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Kugel als

$$X_{k,m,j}(r, \vartheta, \varphi) = y_k(\lambda_{k,m}r) Y_{k,j}(\vartheta, \varphi) \quad k \geq 0, \quad j \in \{-k, \dots, k\}, \quad m \geq 1$$

schreiben. Diese Funktionen bilden wieder ein vollständiges Orthogonalsystem.

Die Gesamtlösung können wir dann in der Form

$$u(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_k(\lambda_{k,m}r) \cdot \sum_{j=-k}^k A_{k,m,j} Y_{k,j}(\vartheta, \varphi) e^{-a\lambda_{k,m}^2 t} \quad (3.75)$$

schreiben, wobei sich die Koeffizienten zumindest prinzipiell durch Integrale ausdrücken lassen.

3.5 Die eindimensionale Wellengleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Gleichung der schwingenden Saite herleiten und deren Lösungen studieren. Dazu nehmen wir an, dass $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite im Punkt x zum Zeitpunkt t ist. Weiters soll die Saite eine konstante Materialdichte ρ (in kg/m) haben und unter einer konstanten Spannung s stehen und Kräfte nur in Tangentenrichtung übertragen können. Wir betrachten nun einen kleinen Ausschnitt der Saite im Intervall $[x_0, x_0 + h]$ und die darauf wirkenden Kräfte (siehe Abbildung 3.5.1). Einerseits wirkt die Kraft $\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ als Masse mal Beschleunigung. Andererseits wirkt an beiden Enden des Intervalls in Tangentialrichtung die Kraft s . Deren Anteil senkrecht zur x -Achse ist dann näherungsweise $-su_x(x_0, t)$ am linken Randpunkt des Intervalls und $su_x(x_0 + h, t)$ am rechten Randpunkt. Diese drei Kräfte müssen nun im Gleichgewicht sein, also

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0, t) = s(u_x(x_0 + h, t) - u_x(x_0, t)).$$

Indem wir diese Gleichung nun durch h dividieren und $h \rightarrow 0$ gehen lassen, erhalten wir mit $c^2 = \frac{s}{\rho}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.76)$$

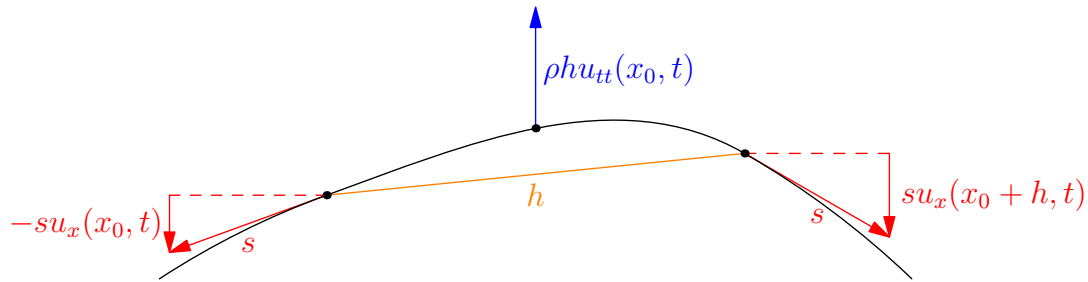


Abbildung 3.5.1: Zur Herleitung der Wellengleichung

Die Größe $c^2 = \frac{s}{\rho}$ setzt sich aus der Materialkonstanten ρ und der Spannung zusammen. Wir werden dieser Größe im Laufe der folgenden Überlegungen eine physikalische Bedeutung geben.

Wir betrachten zuerst als einfache Idealisierung eine unendlich ausgedehnte Saite, als $u(x, t)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann hat (3.76) zwei offensichtliche Lösungen, nämlich

$$f(x + ct) \quad \text{und} \quad g(x - ct)$$

für beliebige zweimal differenzierbare Funktionen f und g . Tatsächlich können wir mit diesen beiden Lösungen alle Anfangswertprobleme für die Wellengleichung lösen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x) && \text{Anfangsauslenkung} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \psi(x) && \text{Anfangsgeschwindigkeit.} \end{aligned}$$

Wir versuchen nun f und g so zu bestimmen, dass

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

die Anfangsbedingungen erfüllt, also

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) + g(x) = \phi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= -cf'(x) + cg'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Sei nun $\Psi(x)$ eine Stammfunktion von ψ , dann können wir die zweite Gleichung integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \phi(x) \\ -f(x) + g(x) &= \frac{1}{c}\Psi(x), \end{aligned}$$

woraus wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\phi(x) - \frac{1}{c}\Psi(x) \right) \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left(\phi(x) + \frac{1}{c}\Psi(x) \right) \end{aligned}$$

erhalten. Die Funktion

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} (\Psi(x + ct) - \Psi(x - ct))$$

erfüllt dann die Anfangsbedingungen und die Gleichung (3.76). Die frei wählbare Integrationskonstante bei der Bestimmung von Ψ fällt wegen der Differenzenbildung weg. Die beiden Wellen, die aus der Anfangsbedingung und der Anfangsauslenkung entstehen, bewegen sich also mit Geschwindigkeit c in beide Richtungen fort. Die Größe c ist also die Schallgeschwindigkeit in der Saite. Dies passt auch damit zusammen, dass c^2 die Einheit $(\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2)/(\text{kg}/\text{m}) = \text{m}^2/\text{s}^2$ hat.

Um nun zu verstehen, wie sich die Schwingungen in endlichen Saiten ausdehnen, müssen wir noch klären, wie sich die Wellen verhalten, wenn sie an eines der eingespannten Enden anstoßen. Dabei werden die Wellen reflektiert und wechseln ihr Vorzeichen. Eine Welle breitet sich also zuerst in beide Richtungen mit Geschwindigkeit c aus, wird an den Enden der Saite reflektiert, die beiden reflektierten Wellen überlagern einander, stoßen wieder an den Enden an, usw. Auf diese Art könnten versuchen zu verstehen, wie die Wellenausbreitung stattfindet, diese angedeutete Erklärung zeigt aber, dass dies eher kompliziert wäre. Wir gehen daher zur bewährten Methode der Variablentrennung über.

Zuerst trennen wir Raum- und Zeitabhängigkeit

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

In die Gleichung eingesetzt:

$$c^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2 c^2$$

und stellen wieder fest, dass beide Seiten der letzten Gleichung konstant sein müssen.

Für die raumabhängige Funktion $X(x)$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

erfüllen wir dann die Randbedingungen

$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow A \sin(\lambda L) = 0.$$

Um in der zweiten Gleichung $A \neq 0$ wählen zu können, muss

$$\lambda L = n\pi \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

sein. Damit haben wir

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

gefunden.

Für die Zeitabhängigkeit wird haben wir eine ähnliche Gleichung, die wir leicht lösen können

$$T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0$$

$$T(t) = A \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right).$$

Damit haben wir Funktionen gefunden, aus denen wir die Gesamtlösung kombinieren können.

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right).$$

Diese Lösungen haben eine besondere Eigenschaft, sie bewegen sich nämlich nicht in x -Richtung, wie die Lösungen, die wir für die unendliche Saite gefunden haben. Man nennt sie daher stehende Wellen (Abbildung 3.5.3).

Wir haben nun einen Ansatz für die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right).$$

Nun gilt es noch die Anfangsbedingungen zu erfüllen:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \stackrel{!}{=} f(x)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \stackrel{!}{=} g(x)$$

Da wir sowohl eine Anfangsauslenkung, als auch eine Anfangsgeschwindigkeit gegeben haben, müssen wir diesmal zwei Sätze von Fourier-Koeffizienten bestimmen.

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

Beispiel 17. Schwingende Klaviersaite Gesucht ist die Lösung der Gleichung $u_{xx} = u_{tt}$ mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Die erste Anfangsbedingung lautet $u(x, 0) = 0$ und die zweite lautet:

$$u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } a - h \leq x \leq a + h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch die erste Anfangsbedingung gilt $a_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Für b_k verwendet man die

entsprechende Koeffizientenformel.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(kx) \, dx = \frac{2}{k\pi} \int_{a-h}^{a+h} \sin(kx) \, dx = \frac{2}{k^2\pi} \left(-\cos(kx) \right) \Big|_{a-h}^{a+h} = \\ &= \frac{2}{k^2\pi} \underbrace{\left(\cos(k(a-h)) - \cos(k(a+h)) \right)}_{=2\sin(ka)\sin(kh), \text{ nach Additionstheorem}} = \frac{4}{k^2\pi} \sin(ka) \sin(kh) \end{aligned}$$

Die Gesamtlösung lautet:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi} \sin(ka) \sin(kh) \sin(kx) \sin(kt)$$

Betrachten wir nun die ersten sechs Obertöne der schwingenden Saite und die Anzahl der Halbtöne, die nötig sind, um diese Obertöne zu erreichen. Außerdem wird auch die Differenz zum nächstgelegenen chromatischen Ton angegeben, der dem beschriebenen Intervall entspricht:

k	Halbtöne	Differenz	Nächste Note	Intervall
1	0.00	0.00	g_0	Prim
2	12.00	0.00	g_1	Oktave
3	19.02	+0.02	d_2	Oktave + Quint
4	24.00	0.00	g_2	2 Oktaven
5	27.86	-0.14	h_2	2 Oktaven + Große Terz
6	31.02	+0.02	d_3	2 Oktaven + Quint
7	33.69	-0.31		liegt zwischen zwei Halbtönen
8	36	0.00	g_3	3 Oktaven

Hierbei ist $k = 1$ der Grundton und $k \geq 2$ sind die Obertöne. Aus der Tabelle kann man ablesen, dass der sechste Oberton bereits mehr als einen Viertelton vom wohltemperierten Intervall auf dem Klavier abweicht. Diese Tatsache wird auch als „subharmonisch“ bezeichnet. Schwingt dieser Oberton mit, würden Zuhörer (mit sehr gutem Gehör) das als unangenehm empfinden.

Um ihn zu unterdrücken muss man a so wählen, dass $\sin(7a) = 0$ ist. Daher wird $a = \frac{\pi}{7}$ gewählt, beziehungsweise für eine allgemeine Länge wird $a = \frac{L}{7}$ gewählt. Aus diesem Grund wird eine Klaviersaite im Siebtel ihrer Länge angeschlagen.

Die Formel zur Berechnung wie viele Halbtöne nötig sind, um zu einem Oberton zu gelangen lautet:

$$h(k) = 12 \cdot \frac{\ln(k)}{\ln(2)}.$$

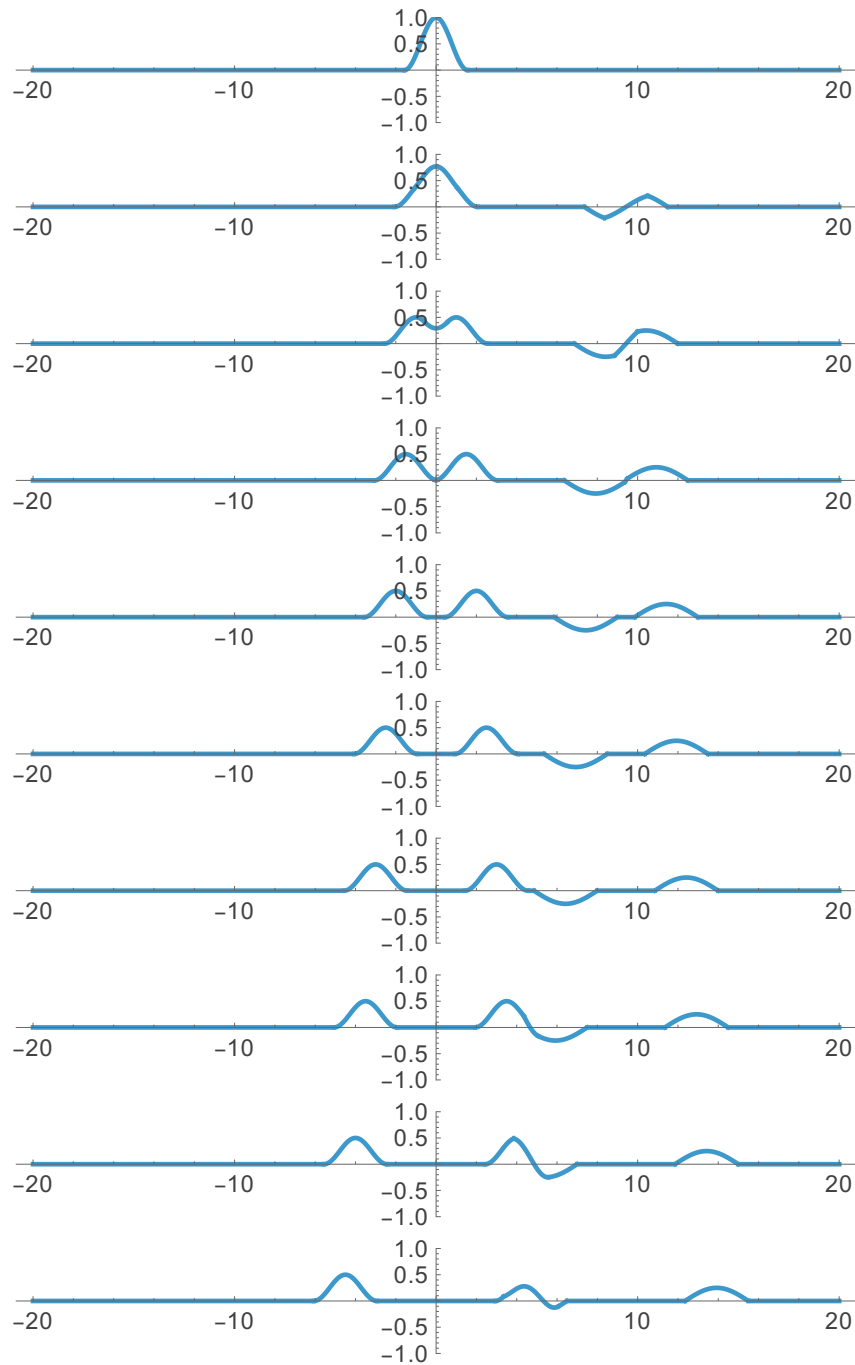


Abbildung 3.5.2: Lösung der Wellengleichung mit Anfangsauslenkung um 0 und Anfangsgeschwindigkeit um 10

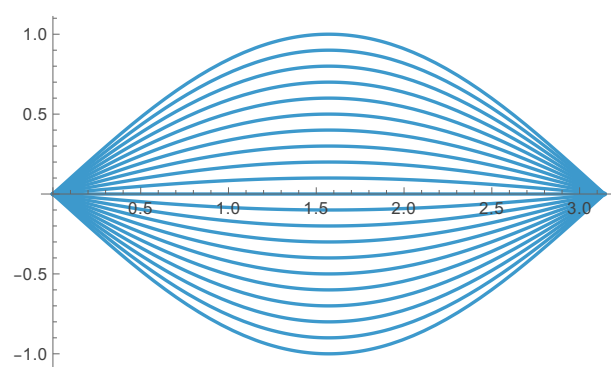


Abbildung 3.5.3: Eine stehende Welle

Kapitel 4

Die Herleitung der Maxwell-Gleichungen

4.1 Vorbemerkungen

Die Elektrodynamik ist ein Teilgebiet des Elektromagnetismus und bildet die physikalische Grundlage für den gesamten Bereich Elektrotechnik. Der Erwerb der Kompetenz aus den drei Mathematik Vorlesungen Mathematik A, B und C liefert die Methoden die Elektrodynamik vollständig mathematisch zu beschreiben. Den Kern der Methoden bilden die Maxwell-Gleichungen.

Das elektrische Feld \mathbf{E} wird als Vektorfeld modelliert, das orts- und zeitabhängig ist: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Es ist abgesehen von einzelnen Punkten beliebig oft differenzierbar. Ein Beispiel für solche singulären Ausnahmepunkten wäre im Coulomb-Feld eine Punktladung, wo es in der Ladung selbst keinen Feldvektor gibt. Die Anziehungs- oder Abstoßungskraft ist in diesem Punkt unendlich groß. Die Feldgleichung dafür ist mathematisch die selbe, wie für das Newtonsche Gravitationsgesetz. Das macht die verwendeten Methoden äußerst nützlich. Man kann die unterschiedlichsten Naturphänomene mit dem selben Formalismus beschreiben.

Auch das magnetische Feld \mathbf{B} wird als orts- und zeitabhängiges Vektorfeld beschrieben: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$. Für den weiteren Verlauf sind auch einige physikalische Begriffe nötig, die in früheren Vorlesungen bereits mathematisch beschrieben wurden. Ein Beispiel dafür ist Energie, oder Arbeit, die physikalisch das selbe bedeuten.

Besitzt ein Feld ein Potential, wie das elektrische Feld, dann ist die Arbeit proportional zur Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten, gleich wie im Gravitationsfeld. Um vom einen Punkt zum anderen zu gelangen muss Arbeit verrichtet werden, die proportional zur Differenz des Potentials in einem Punkt und des Potentials im anderen Punkt ist. Die physikalische Arbeit im elektrischen Feld wird entlang einer Kurve C verrichtet. Dabei

entspricht der Potentialdifferenz die elektrische Spannung:

$$U = \int_C \mathbf{E} \, d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

Bemerkung 25. Integral-Lemma Hierbei handelt es sich um einen mathematischen Zusammenhang, der im weiteren Verlauf immer wieder verwendet wird. Die Grundidee ist der bisher verwendeten Idee der Gebietsdifferentiation sehr ähnlich.

Lemma 1. Sei f eine stetige Funktion und F ein beliebiger Bereich. Unter der Voraussetzung, dass die folgenden Integral-Gleichungen für jeden Bereich F gelten, kann man folgern:

$$\left. \begin{aligned} \int_F f(\mathbf{x}) \, dx &= 0 \\ \iint_F f(\mathbf{x}) \, dx \, dy &= 0 \\ \iiint_F f(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \equiv 0$$

Wobei das Symbol \equiv „identisch gleich“ bedeutet.

Beweis. Angenommen, es existiert ein Punkt \mathbf{x}_0 , in dem f größer als Null ist: $f(\mathbf{x}_0) > 0$. Dann kann man den Bereich F so wählen, dass $f(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in F$, weil f stetig ist. Dann muss auch das Integral der Funktion größer als Null sein:

$$\begin{aligned} \int_F f(\mathbf{x}) \, dx &> 0 \\ \iint_F f(\mathbf{x}) \, dx \, dy &> 0 \\ \iiint_F f(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz &> 0 \end{aligned}$$

Das ist allerdings ein Widerspruch zur Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \int_F f(\mathbf{x}) \, dx &= 0 \\ \iint_F f(\mathbf{x}) \, dx \, dy &= 0 \\ \iiint_F f(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz &= 0 \end{aligned}$$

Daher muss f identisch mit Null sein. □

4.2 Maxwell 1

Faradaysches Induktionsgesetz Dieses Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen dem magnetischen und dem elektrischen Feld. Durch die Änderung des magnetischen Flusses entsteht eine Spannung, eine Form von elektrischer Energie. Dabei betrachtet man eine geschlossene Leiterschleife, die die Fläche A umschließt. Der Rand wird als $\partial A = C$ bezeichnet. Der magnetische Fluss Φ_m durch die Fläche wird folgendermaßen berechnet:

$$\Phi_m = \iint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{o} \quad (4.2)$$

Dabei handelt es sich um das Oberflächenintegral über die Fläche A . Die Änderung des magnetischen Flusses nach der Zeit hängt nicht von \mathbf{x} ab. Es muss sich dabei um eine Funktion abhängig von der Zeit handeln. Die Änderung des magnetischen Flusses nach der Zeit muss gleich der erzeugten Spannung sein:

$$-\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = \oint_C \mathbf{E} \, d\mathbf{x} \quad (4.3)$$

Der magnetische Fluss und die Spannung sind zueinander mit umgekehrten Vorzeichen proportional. Das entspricht der natürlichen Orientierung. Wenn Spannung abgebaut wird, dann entsteht ein magnetischer Fluss.

Um die beiden Gleichungen zu verbinden muss man in der Gleichung (4.2) die partielle Ableitung nach der Zeit bilden. Dadurch ergibt sich unter der Verwendung des Satzes von Stokes (Abschnitt 1.6.4):

$$\iint_A -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{o} = \oint_{\partial A} \mathbf{E} \, d\mathbf{x} \stackrel{(\text{Stokes})}{=} \iint_A \text{rot}(\mathbf{E}) \, d\mathbf{o} \quad (4.4)$$

Nun kann man alles auf eine Seite bringen:

$$0 = \iint_A \left(\text{rot}(\mathbf{E}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\mathbf{o} \quad (4.5)$$

Aus dem Integrallemma 25 folgt:

$$\text{rot}(\mathbf{E}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

Womit wir bei der ersten Maxwell-Gleichung angelangt sind:

$$\boxed{\text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (4.7)$$

4.3 Maxwell 2

Gauß-Gesetz der Elektrostatik Dabei geht es um den elektrischen Fluss. Vom vorigen Unterabschnitt wissen wir, dass es einen Zusammenhang zwischen Flüssen und Energie

gibt. Diesmal betrachtet man ein Gebiet G im Raum \mathbb{R}^3 . Der Rand dieses Gebietes ist die Randfläche $\partial G = A$. Der elektrische Fluss entsteht durch eine gegebene Ladungsverteilung, die ein elektrisches Feld bewirkt. Er ist proportional zur Gesamtladung in diesem Gebiet. Es wird also der elektrische Fluss berechnet:

$$\Phi_E = \iint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{o} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \quad (4.8)$$

Hierbei ist mit der elektrischen Feldkonstante des Vakuums ε_0 die Proportionalität zur Gesamtladung Q im Gebiet G bereits berücksichtigt. Andererseits wird die Gesamtladung mit der gegebenen Dichte ϱ der Ladungsverteilung folgendermaßen berechnet:

$$Q = \iiint_G \varrho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (4.9)$$

Nun baut man die beiden Gleichungen mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß (Abschnitt 1.6.1) zusammen

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_G \varrho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \iint_A \mathbf{E} \, d\mathbf{o} \stackrel{(\text{Gauß})}{=} \iiint_G \operatorname{div}(\mathbf{E}) \, dx \, dy \, dz \quad (4.10)$$

und bringt alles auf eine Seite:

$$\iiint_G \left(\operatorname{div}(\mathbf{E}) - \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \right) dx \, dy \, dz = 0.$$

Wieder erhält man mit dem Integral-Lemma aus Bemerkung 25:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) - \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} = 0$$

und gelangt zur zweiten Maxwell-Gleichung:

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}} \quad (4.11)$$

Die Divergenz des elektrischen Feldes beschreibt also die Quelldichte des Feldes. Gibt es keine Quellen, so ist $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0$.

4.4 Maxwell 3

Hierbei beschäftigen wir uns mit der Divergenz des Magnetfeldes. Bisher wurden in der physikalischen Anschauung keine magnetischen Ladungen beobachtet. Würde man sie eines Tages dennoch entdecken, könnte die Theorie der Maxwell-Gleichungen leicht angepasst werden. Wenn es keine magnetischen Ladungen gibt, so muss die Quelldichte gleich Null sein. Also gilt die dritte Maxwell-Gleichung:

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0} \quad (4.12)$$

4.5 Maxwell 4

Vom logischen Aufbau her fehlt noch die Beschreibung der Rotation des Magnetfeldes. Ähnlich wie für die Wärmeleitungsgleichungen lässt sich der Zusammenhang mit dem Gaußschen Integralsatz und dem Boltzmann-Grundgesetz herleiten. Letzteres besagt, dass die Änderung der Wärmeenergie zu einer Diffusion führt. Das nennt man auch Wärmeströmung. Das Potential der Diffusion ist die Temperaturverteilung.

Das ist ganz ähnlich zum elektrodynamischen Prozess der elektrischen Strömung. Man nennt das die Kontinuitätsgleichung: Die Änderung der Gesamtladung erzeugt einen elektrischen Strom I . Er wird wie folgt berechnet:

$$I = \iint_A \mathbf{j} \, d\mathbf{o} \quad (4.13)$$

Wobei \mathbf{j} die Stromdichte bezeichnet. Nun muss noch die Änderung der Gesamtladung abhängig vom Gebiet und der Zeit im Zusammenhang mit der Dichte $\varrho(\mathbf{x}, t)$ der Ladungsverteilung berechnet werden:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \iiint_G \frac{\partial \varrho}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \iint_{\partial G} \mathbf{j} \, d\mathbf{o} \quad (4.14)$$

Diese Gleichung nennt man **Kontinuitätsgleichung**. Durch den Abbau von Ladungen verstärkt sich der Strom aus dem Gebiet hinaus. Auf der rechten Seite der Gleichung wird der Strom durch die Berandung des Gebiets berechnet. Mit dem bereits bekannten Gaußschen Integralsatz (Abschnitt 1.6.1) erhält man

$$\iiint_G \frac{\partial \varrho}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \iiint_G \operatorname{div}(\mathbf{j}) \, d\mathbf{x}. \quad (4.15)$$

Wir bringen wieder alles auf eine Seite

$$\iiint_G \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{j}) \right) \, d\mathbf{x} = 0$$

und erhalten mit dem Integral-Lemma aus Bemerkung 25:

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}) = - \frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Man möchte allerdings zu einem Zusammenhang mit dem Magnetfeld \mathbf{B} gelangen, dazu verwenden wir vorerst Maxwell 2:

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \operatorname{div}(\mathbf{E})}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Damit gelangen wir zuerst zur Vorstufe der vierten Maxwell-Gleichung:

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.16)$$

Das Feld $\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ist quellenfrei, also muss es sich um ein Wirbelfeld handeln.

Um wirklich zur vierten Maxwell-Gleichung zu gelangen muss noch folgender Zusammenhang gezeigt werden

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Dabei ist μ_0 die magnetische Feldkonstante. Es ist zu bemerken, dass es sich bei \mathbf{j} um die stationäre Stromdichte handelt, die durch eine gegebene Ladungsverteilung entsteht. Wenn das elektrische Feld zeitlich dynamisch verändert wird, entsteht zusätzlich die Verschiebungsstromdichte $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Die beiden verbinden sich zur Maxwellschen Gesamtstromdichte:

$$\mathbf{j}_{\text{ges}} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Es handelt sich beim Wirbelfeld des Magnetfeldes um das Gesamtstromdichtefeld.

Erinnerung 9. Ein Wirbelfeld ist quellenfrei

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{v}) &= \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{v})) &= \langle \nabla, \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0, \end{aligned}$$

weil bei diesen Funktionen nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge beim Differenzieren egal ist.

Erinnerung 10. Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei

Sei u das Potential des Vektorfeldes \mathbf{v} , dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{v}) &= \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(u)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{yz} - u_{zy} \\ u_{zx} - u_{xz} \\ u_{xy} - u_{yx} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Das ist die Integrabilitätsbedingung: Es gibt ein Potential, wenn das Gradientenfeld wirbelfrei ist.

Erinnerung 11.

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \left\langle \nabla, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \right\rangle = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u$$

Erinnerung 12.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{v})) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{yx} - P_{yy} - P_{zz} + R_{zx} \\ R_{zy} - Q_{zz} - Q_{xx} + P_{xy} \\ P_{xz} - R_{xx} - R_{yy} + Q_{yz} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} P_{xx} + Q_{yx} + R_{zx} \\ P_{xy} + Q_{yy} + R_{zy} \\ P_{xz} + Q_{yz} + R_{zz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} \\ Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} \\ R_{xx} + R_{yy} + R_{zz} \end{pmatrix} = \\ &= \operatorname{grad}(P_x + Q_y + R_z) - \Delta \mathbf{v} = \\ &= \operatorname{grad} \left(\left\langle \nabla, \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \right\rangle \right) - \Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{v})) - \Delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

Wobei der Laplace-Operator komponentenweise auf den Vektor \mathbf{v} angewendet wird.

Ampèresches Gesetz Dieses Gesetz gilt für den stromdurchflossenen Leiter, wobei der entstehende Magnetismus eine Form der Energieerhaltung mit dem Stromfluss darstellt. Die magnetische Energie ist also proportional zu dem Strom, der durch den Leiter fließt.

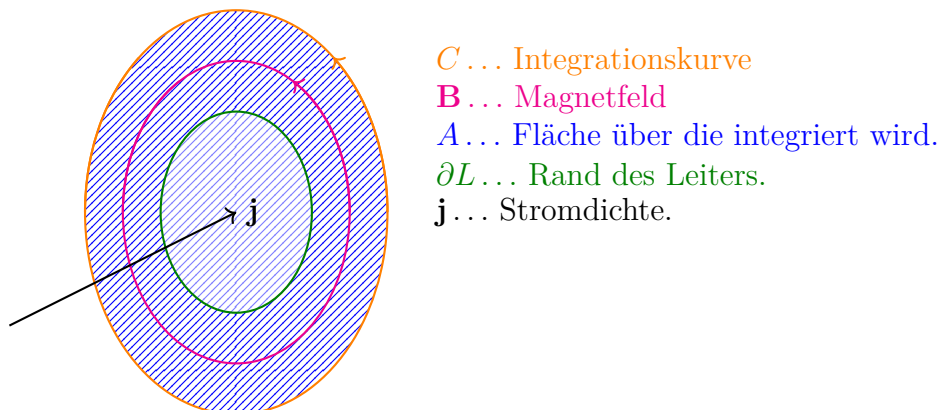


Abbildung 4.5.1: Ein stromdurchflossener Leiter.

Es gilt:

$$\oint_C \mathbf{B} \, d\mathbf{x} = \mu_0 I_{\text{ges}} = \mu_0 \iint_A \mathbf{j}_{\text{ges}} \, d\mathbf{o} \quad (4.17)$$

Dabei ist μ_0 die magnetische Feldkonstante im Vakuum. Da wir auf den Rotor des Magnetfeldes hinaus wollen, wenden wir den Satz von Stokes (Abschnitt 1.6.4) auf die linke Seite an und erhalten:

$$\iint_A \text{rot}(\mathbf{B}) \, d\mathbf{o} \stackrel{(\text{Stokes})}{=} \oint_C \mathbf{B} \, d\mathbf{x} = \mu_0 \iint_A \mathbf{j}_{\text{ges}} \, d\mathbf{o}$$

Bringen wir alles auf eine Seite:

$$\iint_A (\text{rot}(\mathbf{B}) - \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ges}}) \, d\mathbf{o} = 0$$

Mit Hilfe des Integral-Lemmas aus Bemerkung 25 folgt daraus:

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ges}}$$

Mit der Formel für die Maxwellsche Gesamtstromdichte erhält man die vierte Maxwell-Gleichung:

$$\boxed{\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)} \quad (4.18)$$

4.6 Spezialfälle

Ladungsfreies Vakuum Es sind keine Ladungen vorhanden, daher gibt es auch keinen Strom: $\varrho = 0$ und $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Aus Maxwell 2 und 3 folgt $\text{div}(\mathbf{E}) = \text{div}(\mathbf{B}) = 0$. Aus Maxwell 4 folgt:

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Bigg| \quad \text{rot}(\cdot)$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{B})) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \text{rot}(\mathbf{E})}{\partial t}$$

Aus Maxwell 1 folgt:

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{B})) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Mit Hilfe der Erinnerung 12 folgt daraus:

$$\underbrace{\text{grad}(\text{div}(\mathbf{B}))}_{=0} - \Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \mathbf{B} = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Unter der Voraussetzung, dass \mathbf{B} aus den Komponenten $P(x, y, z, t)$, $Q(x, y, z, t)$ und $R(x, y, z, t)$ besteht, betrachten wir aus der Gleichung die erste Komponente:

$$\begin{aligned}\Delta P(x, y, z, t) &= c^2 P_{tt} \\ \Delta u &= c^2 u_{tt}\end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um die dreidimensionale Wellengleichung, die formal der im Abschnitt 3.5 studierten Saitenschwingungsgleichung sehr ähnlich ist. Tatsächlich kann diese Gleichung mit ähnlichen Ideen, also Trennung in Raum- und Zeitabhängigkeit gelöst werden.

Elektrostatik Im stationären Fall sind Ladungen vorhanden, bewegen sich aber nicht. Daraus kann man folgende Schlussfolgerungen ziehen:

$$\begin{aligned}\text{Maxwell 1} &\Rightarrow \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0} \\ \text{Maxwell 2} &\Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{E}) = \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \\ \text{Maxwell 3} &\Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0 \\ \text{Maxwell 4} &\Rightarrow \operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}$$

Nachdem der Rotor des elektrischen Feldes Null ist, muss es wirbelfrei sein. Es ist ein Gradientenfeld und es gibt dafür ein Potential. Daher darf man den Satz von Stokes (Abschnitt 1.6.4) dafür anwenden:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \, d\mathbf{x} \stackrel{(\text{Stokes})}{=} \iint_A \operatorname{rot}(\mathbf{E}) \, d\mathbf{o} = \int_A \mathbf{0} \, d\mathbf{o} = 0$$

Das bedeutet, dass die Kurvenintegrale über das elektrische Feld wegunabhängig sind. Die benötigte Energie einer Ladung, um das Feld zu durchqueren hängt nur von der Differenz des End- und Anfangspunktes ab. Das ist die Eigenschaft eines Potentials. Im folgenden wird das elektrische Potential als Φ bezeichnet.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \operatorname{grad}(\Phi) \\ \Phi &= \Phi(x, y, z)\end{aligned}$$

Aus Maxwell 2 folgt dann:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{E}) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\Phi)) = \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \\ \Delta \Phi &= \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Das nennt man die **Poisson-Gleichung** für $\varrho \neq 0$. Sind keine Ladungen vorhanden, dann ist $\varrho = 0$ und das Feld quellenfrei. Ein wirbel- und quellenfreies Feld erfüllt die Potentialgleichung $\Delta \Phi = 0$.

Anhang A

Formelsammlungen

A.1 1. Teilklausur

Tipps für das Integrieren von Winkelfunktionen & Additionstheoreme:

Partiell Integrieren: $\int f g \, dx = f G - \int f' G \, dx$

Sinus-Substitution: $u = \sin \varphi \Rightarrow \cos \varphi \, d\varphi = du$

Werte von Integralen:

$$\int_0^\pi \sin^2(\varphi) \, d\varphi = \int_0^\pi \cos^2(\varphi) \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N} :$$

$$\int_0^\pi \cos(\varphi) \, d\varphi = \int_0^\pi \cos^3(\varphi) \, d\varphi = \dots = \int_0^\pi \cos^{2n+1}(\varphi) \, d\varphi = 0$$

$$\int_0^\pi \sin^m(\varphi) \cos(\varphi) \, d\varphi = \int_0^\pi \sin^m(\varphi) \cos^3(\varphi) \, d\varphi = \dots = \int_0^\pi \sin^m(\varphi) \cos^{2n+1}(\varphi) \, d\varphi = 0$$

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \\ \sin \varphi \cos \varphi &= \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \\ \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)\end{aligned}$$

Parametrisierungen: 2D:

Kreis: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi]$

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \Rightarrow x = a r \cos \varphi, y = b r \sin \varphi$

3D:

Zylinder: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi]$

Paraboloid: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r^2, r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi]$, wenn sich das Paraboloid in Richtung positiver z -Achse öffnet.

Kugel: $x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta, r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi]$

Tipps zur Berechnung eines Kurvenintegrals $\int_C \mathbf{V} d\mathbf{x}$:

- Die Kurve abhängig von Parameter(n) machen.
- $d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ durch Ableitung nach Parameter(n) ausdrücken.
! Den Satz von Stokes darf man nur anwenden, wenn die Kurve geschlossen ist !
- Grenzen bestimmen.
- Integral berechnen.

Potential ϕ von \mathbf{V} finden:

- Verwende $\mathbf{V} = \text{grad}(\phi)$, ein Kurvenintegral ist wegunabhängig, wenn ϕ existiert.
- Prüfe die entsprechende Integrabilitätsbedingung:
- 2D: $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, es muss $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ gelten.
- 3D: $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$, es muss $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$ gelten. ($\text{rot}(\mathbf{V}) = 0$)
- Berechne ϕ über Integrieren & Differenzieren (statt Integrationskonstanten kommen in jedem Schritt Integrationsfunktionen). Existiert das Potential, dann kann man einfach mit $\phi(b) - \phi(a)$ das Kurvenintegral berechnen.

3D Oberflächenintegrale:

- Parametrisieren der Fläche \mathbf{x} in z.B.: u, v
- Den Normalvektor als Kreuzprodukt der Tangentialvektoren berechnen:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \quad \text{Orientierung beachten!!!} \quad \tilde{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

- Den Ausdruck $d\mathbf{o}$ durch den entsprechenden Ausdruck mit $du dv$ ersetzen: $d\mathbf{o} = \mathbf{n} du dv$ bzw. $\mathbf{o} = \tilde{\mathbf{n}} d\mathbf{o}$ mit $d\mathbf{o} = \|\mathbf{n}\| du dv$.
- $\iint_F \mathbf{V} \mathbf{n} du dv$ mit den richtigen Grenzen berechnen, die Berechnung der Jakobi-Determinante ist nicht nötig.
- Es wird dadurch der Fluss des Vektorfeldes durch die gegebene Fläche berechnet.

Differentialoperationen:

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{V}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0 \\ \operatorname{grad}(f) &= \nabla f \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) &= \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Integralsatz von Gauss (3D): ! Nur anwendbar auf eine geschlossene Fläche, in diesem Fall muss sie ein Volumen vollständig ohne Lücken umhüllen !

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial B} \mathbf{V} d\mathbf{o} = \iiint_B \operatorname{div}(\mathbf{V}) \, dx \, dy \, dz$$

Gauss - Green Formel (3D): ! Nur anwendbar auf eine geschlossene Fläche, in diesem Fall muss sie ein Volumen vollständig ohne Lücken umhüllen !

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial B} (f \operatorname{grad}(g) - g \operatorname{grad}(f)) \, d\mathbf{o} = \iiint_B (f \Delta g - g \Delta f) \, dx \, dy \, dz$$

Integralsatz von Stokes (3D): ! Nur anwendbar auf eine Fläche deren Rand eine differenzierbare Kurve ist !

$$\oint_{\partial A} \mathbf{V} d\mathbf{x} = \iint_A \operatorname{rot}(\mathbf{V}) \, d\mathbf{o}$$

- Linke Seite: Geschlossenes Kurvenintegral entlang des Randes einer Fläche (kann in mehrere Teile aufgeteilt werden)
- Rechte Seite: $d\mathbf{o} = \tilde{\mathbf{n}} \, do$, wenn die Fläche in u und v parametrisiert ist. Jakobi-Determinante ist nicht nötig.
- Berechnet den Anteil des Vektorfeldes, der tangential an die Kurve liegend in Laufrichtung des Kurvenintegrals zeigt (Wirbeldichte).

Integralsatz von Gauss (2D): ! Nur anwendbar auf eine geschlossene Kurve, in diesem Fall muss sie eine Fläche vollständig ohne Lücken umhüllen !

Auch bekannt als Satz von Gauss-Green oder Green-Riemann und ist eine Sonderform des Satzes von Stokes.

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ \oint_{\partial B} \mathbf{V} \, d\mathbf{x} &= \oint_{\partial B} (f_1 \, dx + f_2 \, dy) = \iint_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \, dx \, dy \\ \text{Gilt } \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{\partial f_2}{\partial x}, \text{ dann gilt } \oint_{\partial B} \mathbf{V} \, d\mathbf{x} = 0\end{aligned}$$

Berechnung des Flusses eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve (2D): ! Die Kurve muss eine Fläche vollständig ohne Lücken umhüllen !

Erste Möglichkeit:

- Finde eine Parametrisierung $\mathbf{x}(t)$ von der Kurve und bestimme die Grenzen a und b .
- Bestimme den Normalvektor \mathbf{n} auf die Kurve.
- Setze die Parametrisierung in das Vektorfeld ein.
- Berechne das Kurvenintegral.

Zweite Möglichkeit: Man berechnet den Fluss mit Hilfe der Divergenz des Vektorfeldes mittels folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{n} \, dt &= \oint_{\partial B} (-f_2 \, dx + f_1 \, dy) = \iint_B \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx \, dy = \\ &= \iint_B \operatorname{div}(\mathbf{V}) \, dx \, dy \end{aligned}$$

A.2 2. Teilklausur

Laplace-Operator in Polarkoordinaten:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Ansätze von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} f'(x) + Cf(x) &= 0 & f(x) &= K e^{-\lambda x} \\ f''(x) + Cf(x) &= 0 & f(x) &= A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \\ x^2 f''(x) + Cx f'(x) + Df(x) &= 0 & f(x) &= K x^\alpha \end{aligned}$$

Lösung der Potentialgleichung in \mathbb{R}^2 :

Randbedingung: $u(1, \varphi) = f(\varphi)$

$f(\varphi) \dots$ Gerade Funktion

(axialsymmetrisch $f(\varphi) = f(-\varphi)$ z.B.: $\cos \varphi$)

$$\Rightarrow b_n = 0$$

$f(\varphi) \dots$ Ungerade Funktion

(punktsymmetrisch $f(\varphi) = -f(-\varphi)$)

z.B.: $\sin \varphi$

$$\Rightarrow a_n = 0$$

Koeffizientenformeln:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Gesamtlösung:

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))$$

Winkelfunktionen Äquivalenzen: $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(2\pi n) = \cos\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(2\pi n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2\pi n \pm \pi) = -1$$

$$\sin(\pi n) = \cos\left(\pi n \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(\pi n) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

$$\sin\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi n \pm \pi) = (-1)^{n+1}$$

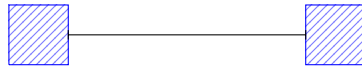
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2n \\ (-1)^k & \text{für } k = 2n+1 \end{cases} a_k \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \mapsto a_{2n-1}(-1)^{n-1}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{für } k = 2n \\ 0 & \text{für } k = 2n+1 \end{cases} a_k \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \mapsto a_{2n}(-1)^n$$

! Nicht vergessen k auch für alle Ausdrücke in der Gesamtlösung anzupassen !

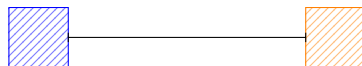
Wärmeleitungsgleichungen

Nicht Isoliert:

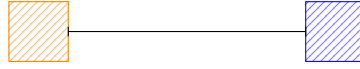


$$\begin{aligned} c^2 u_{xx} &= u_t \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ \lambda &= \frac{\pi n}{L} \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \\ u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 c^2 t} \end{aligned}$$

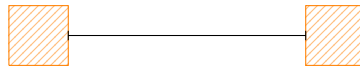
Rechtsseitig isoliert:



$$\begin{aligned} c^2 u_{xx} &= u_t \\ u(0, t) &= u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ \lambda &= \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) dx \\ u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 c^2 t} \end{aligned}$$

Linksseitig isoliert:

$$\begin{aligned}
 c^2 u_{xx} &= u_t \\
 u_x(0, t) &= u(L, t) = 0 \\
 u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\
 \lambda &= \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\
 a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx \\
 u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 c^2 t}
 \end{aligned}$$

Vollständig isoliert:

$$\begin{aligned}
 c^2 u_{xx} &= u_t \\
 u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0 \\
 u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\
 \lambda &= \frac{n\pi}{L} \\
 a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \\
 a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 u(x, t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 c^2 t}
 \end{aligned}$$

Tipps für das Integrieren von Winkelfunktionen & Additionstheoreme:

Partiell Integrieren: $\int f g \, dx = f G - \int f' G \, dx$

Sinus-Substitution: $u = \sin \varphi \Rightarrow \cos \varphi \, d\varphi = du$

Werte von Integralen:

$$\int_0^{\pi} \sin^2(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{\pi} \cos^2(\varphi) \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$\forall m, n \in \mathbb{N} :$

$$\int_0^{\pi} \cos(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{\pi} \cos^3(\varphi) \, d\varphi = \dots = \int_0^{\pi} \cos^{2n+1}(\varphi) \, d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin^m(\varphi) \cos(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin^m(\varphi) \cos^3(\varphi) \, d\varphi = \dots = \int_0^{\pi} \sin^m(\varphi) \cos^{2n+1}(\varphi) \, d\varphi = 0$$

Additionstheoreme:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi)$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin(2\varphi)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$$