MATHEMATIK C

Univ.-Prof. Dr. Christoph Aistleitner
Univ.-Prof. Dr. Robert Tichy

Inhaltsverzeichnis

1. Vektoranalysis **1**

1.1. Grundbegriffe (Wiederholung) . . . 1
1.1.1. Vektorfeld . . . 1
1.1.2. Potential und Feldlinien . . . 1
1.1.3. Divergenz in der Ebene . . . 2
1.1.4. Newton-Potential im Raum . . . 3
1.1.5. Divergenz im Raum . . . 4
1.1.6. Rotation . . . 4
1.2. Arbeit im Kraftfeld und Kurvenintegrale in der Ebene . . . 4
1.2.1. Bogenlänge ebener Kurven . . . 4
1.2.2. Kurvenintegrale in der Ebene . . . 5
1.2.3. Satz von Green-Riemann . . . 9
1.2.4. Wegunabhängigkeit bei Gradientenfeldern . . . 12
1.2.5. Bestimmung des Potentials . . . 12

2. Komplexe Funktionentheorie **14**

2.1. Grundbegriffe über Funktionen im Komplexen . . . 14
2.1.1. Einführung . . . 14
2.1.2. Beispiele von Funktionen . . . 15
2.1.3. Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . 15
2.1.4. Potenzreihen im Komplexen . . . 16
2.1.5. Hauptsatz über Potenzreihen . . . 16
2.1.6. Hauptsatz der komplexen Funktionentheorie . . . 17
2.1.7. Identitätssatz für holomorphe Funktionen . . . 17
2.2. Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen und harmonische Funktionen 18
2.2.1. Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen . . . 18
2.2.2. Interpretation von komplexen Funktionen . . . 20
2.2.3. Harmonische Funktionen . . . 21
2.2.4. Zusammenfassung . . . 23
2.3. Elementare Funktionen in $\mathbb{C}$ . . . 23
2.3.1. Exponentialfunktion . . . 23
2.3.2. Trigonometrische Funktionen . . . 23
2.3.3. Nullstellen der Exponentialfunktion . . . 24
2.3.4. Nullstellen der trigonometrischen Funktionen . . . 24
2.3.5. Weitere trigonometrische Funktionen . . . 25
2.3.6. Komplexer Logarithmus . . . 25
2.3.7. Potenzfunktionen . . . 27
2.3.8. Arcus- und Areafunktionen . . . 28
2.4. Komplexe Kurvenintegrale . . . 29

2.4.1. Rechenregeln . . . 29
2.4.2. Integralsatz von Cauchy . . . 31
2.5. Residuenkalkül . . . 33
2.5.1. Laurent-Entwicklung und Residuum . . . 33
2.5.2. Berechnung von reellen Integralen . . . 34
2.5.3. Uneigentliche reelle Integrale . . . 36
2.6. Fourier-Transformation . . . 37
2.6.1. Anwendung auf Probleme bei partiellen Differentialgleichungen . . . 41
2.7. Laplace-Transformation . . . 42
2.7.1. Anwendung auf Probleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . 49
2.7.2. Anwendung auf Probleme bei partiellen Differentialgleichungen . . . 52

3. Vektoranalysis im Raum **54**
3.1. Vektorielle Darstellung einer Kurve im Raum . . . 54
3.2. Differentiation eines Vektors nach einem Parameter . . . 55
3.3. Vektor- oder Kraftfelder . . . 56
3.4. Gradient, Divergenz, Rotation . . . 56
3.5. Rechnen mit Differentialoperatoren . . . 58

4. Kurvenintegrale im Raum **61**
4.1. Definition . . . 61
4.2. Eigenschaften . . . 64
4.3. Gradientenfelder und Kurvenintegrale . . . 66

5. Oberflächenintegrale **70**
5.1. Flächen im Raum . . . 70
5.2. Oberflächenintegrale . . . 71

6. Integralsätze **74**
6.1. Satz von Stokes . . . 74
6.2. Satz von Gauss . . . 75
6.3. Satz von Green . . . 78
6.4. Maxwell'sche Gleichungen . . . 80
6.4.1. Das Faraday'sche Induktionsgesetz . . . 80
6.4.2. Gauss'sches Gesetz der Elektrostatik . . . 81
6.4.3. Ampere'sches Gesetz . . . 82
6.4.4. Kontinuitätsgleichung . . . 83

7. Partielle Differentialgleichungen **84**
7.1. Wellengleichung . . . 84
7.1.1. Homogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung . . . 84
7.1.2. Inhomogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung . . . 84
7.1.3. Inhomogene Differentialgleichung und inhomogene Randbedingung . . . 85
7.2. Diffusionsgleichung . . . 85
7.2.1. Homogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung . . . 85
7.2.2. Inhomogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung . . . 86
7.2.3. Inhomogene Differentialgleichung und inhomogene Randbedingung . . . 86

7.3. Schwingende Membran 87
7.3.1. Rechteckige Membran 87
7.3.2. Kreisförmige Membran 91
7.4. Potential einer Kugel 95
7.4.1. Innenraumproblem 96
7.4.2. Außenraumproblem 97
7.5. Wärmeleitung auf der Kreisscheibe 98

A. Potenzreihenansätze bei gewöhnlichen Differentialgleichungen **101**
A.1. Lösungen bei regulären Koeffizienten 101
A.2. Lösungen bei schwach singulären Koeffizienten 103

1. Vektoranalysis

1.1. Grundbegriffe (Wiederholung)

1.1.1. Vektorfeld

Definition 1.1. Unter einem *Vektorfeld im Raum* versteht man eine Funktion

$$\vec{v} = \vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix},$$

die jedem Punkt (x, y, z) einen Vektor $\vec{V}$ zuordnet.

Beispiel 1.1. Beispiele für Vektorfelder sind etwa das *Gravitationsfeld* oder das *elektrostatische Feld*.

Definition 1.2. Eine analoge Definition ist für ein *Vektorfeld in der Ebene* möglich; alles schränkt sich auf nur mehr zwei Dimensionen ein:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1.2. Ein Beispiel für ein Vektorfeld in der Ebene ist die *ebene Strömung* auf einer Wasseroberfläche.

1.1.2. Potential und Feldlinien

Definition 1.3. Eine Skalarfunktion $u = u(x, y, z)$ heißt *Potential des Vektorfeldes*, falls

$$\operatorname{grad} u = \vec{v}.$$

Definition 1.4. Eine Kurve, die tangential an den Feldvektor verläuft, heißt *Feldlinie*.

Folgerung. Ist ein zweidimensionales Strömungsfeld gegeben durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$, dann lässt sich die Gleichung der Feldlinie $y = y(x)$ durch folgende Überlegung bestimmen: Die Steigung der Feldlinie ergibt sich aus $y' = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = f(x, y)$, man erhält also zur Bestimmung der Feldlinie eine *gewöhnliche DGL[1] 1. Ordnung*.

[1] DGL = Differentialgleichung

Beispiel 1.3. Sei ein *logarithmisches Potential* in der Ebene gegeben durch

$$u(x,y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Dann ergibt sich das Vektorfeld aus

$$\begin{aligned} u(x,y) = \ln \frac{1}{r} = \ln(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ \vec{v} = \operatorname{grad} u = \nabla u = -\frac{1}{2}\nabla \ln(x^2+y^2) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{r^2} \\ -\frac{y}{r^2} \end{pmatrix} \\ = -\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Betrag dieses Vektorfeldes gilt

$$|\vec{v}| = \frac{1}{r^2}\underbrace{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|}_{r} = \frac{1}{r}.$$

Je näher man also zur Ursprung kommt, desto stärker wird das Feld. Dieses steigt zum Ursprung hin ins Unendliche. Das Feld besitzt im Ursprung eine *Singularität*, d.h. das Feld ist in diesem Punkt nicht zu betrachten.

Bemerkung. Im obigen Beispiel wurde die Operatorenschreibweise[2] zur Darstellung des Gradienten verwendet. Es gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

1.1.3. Divergenz in der Ebene

Symbolisch kann die Divergenz als Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld verstanden werden. Es gilt

Definition 1.5. Die Divergenz ist definiert als

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Die Divergenz ist ein Maß für die *Quellendichte* (also für das Vorhandensein von Quellen und Senken) eines Vektorfeldes. Ein Feld ist *quellenfrei*, wenn $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ gilt.

Beispiel 1.4. Beim logarithmischen Potential gilt ebenfalls $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ bzw.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Es gilt: $\ln \frac{1}{r}$ ist Lösung der partiellen DGL $\Delta u = 0$ (Potentialgleichung).

[2] Dieser Operator wird als *Nabla-Operator* bezeichnet.

Bemerkung. Ein weiterer wichtiger Operator ist der LAPLACE-*Operator*, der als

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

definiert ist.

Aus obigen Überlegungen ergibt sich $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v}$. Im Fall des logarithmischen Potentials ergibt sich so

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \operatorname{grad} u &= \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xr^{-2} \\ -yr^{-2} \end{pmatrix}, \\
\Delta u = \operatorname{div} \vec{v} &= -r^{-2} - x(-2r^{-3}\frac{x}{r}) - r^{-2} - y(-2r^{-3}\frac{y}{r}) = -\frac{2}{r^2} + 2\frac{x^2}{r^4} + 2\frac{y^2}{r^4} \\
&= -\frac{2}{r^2} + 2\frac{r}{r^4} = 0.
\end{aligned}$$

1.1.4. NEWTON-Potential im Raum

Ein sehr wichtiges Potential ist das NEWTON'sche Potential, das im Raum die Gleichung

$$u(x, y, z) = \frac{1}{r} = r^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

besitzt. Mit den inneren Ableitungen $r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$ und $r_z = \frac{z}{r}$ erhält man das zugehörige Feld

$$\vec{v} = \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Dieses Feld beschreibt z.B. die *Gravitationskraft*. Befindet sich ein Zentralkörper mit der Masse M im Ursprund des Koordinatensystems, dann gilt unter Einbeziehung der Gravitationskonstanten κ (es handelt sich dabei um eine Naturkonstante) das *Gravitationsgesetz*:

$$\vec{K} = \frac{M\kappa}{r^3} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Für den Betrag des Kraftfeldes gilt

$$\left|\vec{K}\right| = \frac{M\kappa}{r^3} \left| \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right| = \frac{M\kappa}{r^3} \cdot r = \frac{M\kappa}{r^2}.$$

Die Kraft, die auf die Einheitsmasse 8.314472 kg in einem Abstand r zur Zentralmasse wirkt, wird also durch folgende Gleichung beschrieben:

$$F = \frac{M\kappa}{r^2}.$$

Bemerkung. Das NEWTON'sche Potential $u = \frac{1}{r}$ erfüllt die Potentialgleichung: $\Delta u = 0$.

1.1.5. Divergenz im Raum

Analog kann die Divergenz im Raum definiert werden. Es gilt

Definition 1.6.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

1.1.6. Rotation

Die Rotation ist ein Maß für die *Wirbeldichte* in einem Vektorfeld.

Definition 1.7. Der *Rotor* ist definiert als der Vektor

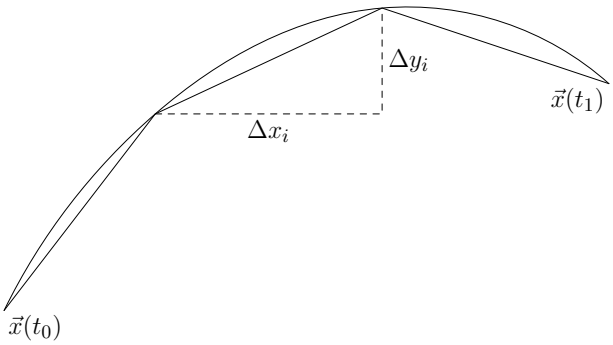
$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v}.$$

In einem *wirbelfreien* Feld gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$.

1.2. Arbeit im Kraftfeld und Kurvenintegrale in der Ebene

1.2.1. Bogenlänge ebener Kurven

Gegeben sei eine Kurve C in ihrer Parameterdarstellung $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t_0 \leq t \leq t_1$. Gesucht ist die Bogenlänge dieser Kurve. Man unterteilt die Kurve in sehr kleine Stücke und ersetzt die Kurve durch die Verbindungsgeraden dieser Unterteilungen:



Die Bogenlänge wird nun durch die Summe der Längen der Geradenstücke approximiert:

$$s(t_0, t_1) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}\, \Delta x_i = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i.$$

Geht die Feinheit der Zerlegung gegen Unendlich, so konvergiert diese Riemannsumme gegen das bestimmte Integral und somit gilt

$$s(t_0, t_1) = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Beispiel 1.5. Wir berechnen die Länge der oberen Halbkreislinie des Einheitskreises. Jeder Punkt auf dieser Linie erfüllt die Gleichung $y = \sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned} s(-1,1) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\,dx \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Bemerkung. Falls die Gleichung der Kurve C nicht nach y auflösbar ist, können wir die Bogenlänge trotzdem berechnen:

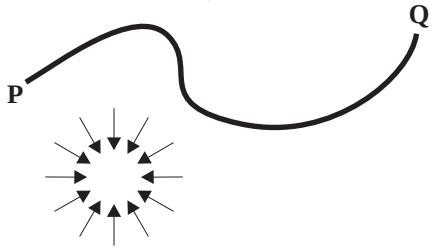
$$s(t_0,t_1) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\frac{\Delta x_i^2}{\Delta t_i^2} + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta t_i^2}}\,\Delta t_i = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\dot{x}(\xi)^2 + \dot{y}(\eta)^2}\,\Delta t_i.$$

Somit gilt

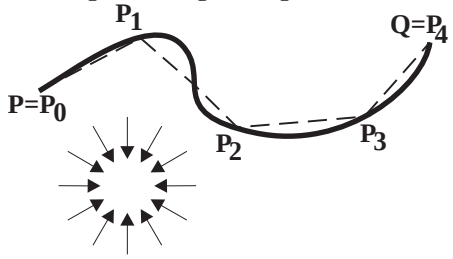
$$s(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

1.2.2. Kurvenintegrale in der Ebene

Gegeben sei ein Vektorfeld (Kraftfeld) $\vec{v}$ in der Ebene, sowie eine Kurve C. Gesucht ist die Arbeit, die verrichtet wird, wenn sich ein Massenpunkt entlang der Kurve vom Anfang (Punkt P mit $t=\alpha$) zum Ende (Punkt Q mit $t=\beta$) bewegt.



Nach der Formel $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$ (Arbeit = Kraft mal Weg) ergibt sich eine sehr einfache Vorgehensweise, analog zur Berechnung der Bogenlänge:



An der Teilstrecke $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ wird demnach die Arbeit

$$W_i = \vec{v}(P_i)\cdot\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$$

verrichtet. Insgesamt ergibt sich durch Aufsummieren die Gesamtarbeit

$$W = \sum_{i=0}^{N-1} W_i = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{v}(P_i) \cdot \overrightarrow{P_i P_{i+1}}.$$

Nun betrachtet man folgenden *Grenzfall*: Die Feinheit der Zerlegung geht gegen Null, d.h. die Anzahl der gewählten Zwischenpunkte steigt gegen Unendlich. Dann strebt die Summe der Teilarbeiten gegen das Kurvenintegral, und der Sehnenvektor $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ strebt gegen den Tangentenvektor.
Die Arbeit in einem Kraftfeld ist auf diese Weise also folgendermaßen definiert:

$$W = \int_\alpha^\beta \vec{v}(x(t), y(t))\, d\vec{s}.$$

Dabei ist $d\vec{s}$ das *vektorielle Bogenelement* in Tangentenrichtung. Für den Betrag dieses Bogenelements gilt

$$|d\vec{s}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Daraus folgt für die Bogenlänge die wohlbekannte Formel

$$s = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Führt man nun noch den *normierten Tangentenvektor* $\vec{t}_0$ ein, dann gilt als weitere Beziehung $d\vec{s} = \vec{t}_0\, ds$. Für den Tangentenvektor selbst gilt in Komponentenschreibweise

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_0 = \begin{pmatrix} \cos \measuredangle(\vec{t}, \text{x-Achse}) \\ \cos \measuredangle(\vec{t}, \text{y-Achse}) \end{pmatrix}.$$

Die zwei Cosinusse werden auch als *Richtungscosinusse* bezeichnet. Nun kann das Kurvenintegral auch noch in folgender Form geschrieben werden:

$$W = \int_\alpha^\beta \left[P(x,y,z) \cos \measuredangle(\vec{t}, x) + Q(x,y,z) \cos \measuredangle(\vec{t}, y) \right]\, ds$$

Die Berechnung des normierten Tangentenvektors erfolgt wie gewohnt durch Ableiten nach dem Parameter und Normierung, man erhält

$$\vec{t}_0 = \frac{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

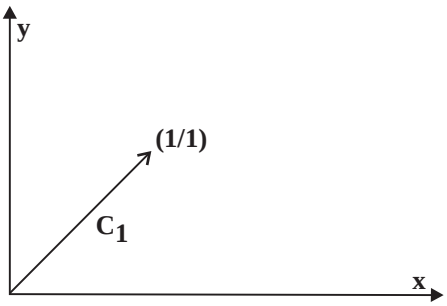
Das Kurvenintegral selbst kann nun ebenfalls in Parameterform bestimmt werden:

$$\begin{aligned} W &= \int_\alpha^\beta \vec{v}\, d\vec{s} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}\, \underbrace{\vec{t}_0 \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt}_{ds}}_{d\vec{s}} = \\ &= \int_\alpha^\beta \left[P(x,y)\dot{x} + Q(x,y)\dot{y} \right]\, dt. \end{aligned}$$

Setzt man weiters als Vereinfachungen $dx = \dot{x}\,dt$ und $dy = \dot{y}\,dt$, so ergibt sich als vereinfachte *vektorielle Schreibweise*

$$W = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C \vec{v}\,d\vec{x}$$

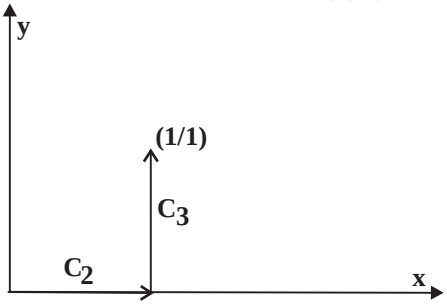
Beispiel 1.6. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und der Integrationsweg $C_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$:



Man beachte, dass der Integrationsweg eine *Orientierung* aufweist. Die Integration entlang C_1 ergibt

$$\begin{aligned} W &= \int_{C_1} \vec{v}\,d\vec{x} = \\ &= \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \\ &= \int_{C_1} x\,dx + y\,dy \overset{x=y=t,\,dx=dy=dt}{=} \\ &= \int_{t_0}^{1} (t\,dt + t\,dt) = \\ &= 2\int_{t_0}^{1} t\,dt = [t^2]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Beispiel 1.7. Betrachtet man nun dasselbe Feld, aber einen anderen Integrationsweg, nämlich den aus C_2 und C_3 zusammengesetzten Weg von (0/0) nach (1/1):



Die entsprechende Parametrisierungen der beiden Teilwege lauten

$$C_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1$$

und

$$C_3 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1$$

Die Kurvenintegrale über die Teilstrecken sind

$$\int_{C_2} \vec{v}\, d\vec{x} = \int_{t_0}^{1} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

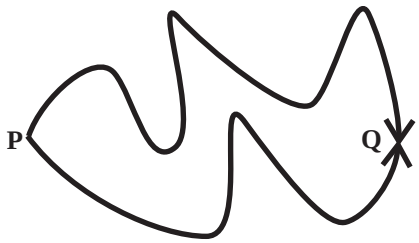
und

$$\int_{C_3} \vec{v}\, d\vec{x} = \int_{t_0}^{1} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung. In diesem Beispiel hängt das Kurvenintegral nicht vom gewählten Weg ab, denn es gilt $\int_{C_1} = \int_{C_2} + \int_{C_3}$. Die physikalische Arbeit, die verrichtet werden muss, um vom Anfangspunkt zum Endpunkt zu gelangen, hängt nicht vom gewählten Weg ab.

Dies führt uns zur

Definition 1.8. Ein Kurvenintegral heißt *wegunabhängig*, falls es nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht vom zurückgelegten Weg.



Es gilt also für beliebige Wege C_1, C_2 von P nach Q

$$\int_{C_1} = \int_{C_2}.$$

Folgerung. Daraus ergibt sich als Folgerung, dass bei Wegunabhängigkeit das Integral entlang einer geschlossenen Kurve Null ist. Für $C = C_1 - C_2$ (das negative Vorzeichen steht hier wegen der Orientierung der Kurven) ist also

$$\int_C = \int_{C_1} - \int_{C_2} = 0.$$

Bemerkung. Bei Wegunabhängigkeit wird entlang geschlossener Wege keine Arbeit verrichtet.

Notation 1.9. Integrale entlang geschlossener Wege heißen *Ringintegrale*. Diese werden als

$$\int_C = \oint_C = \oint$$

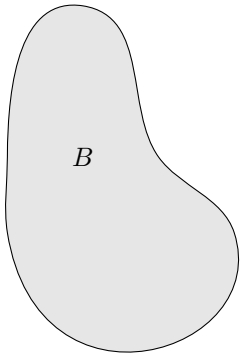
geschrieben.

1.2.3. Satz von Green-Riemann

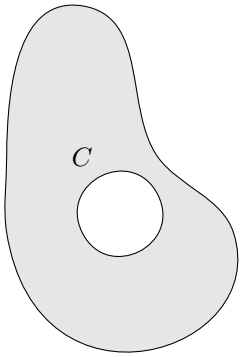
Definition 1.10. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte $x, y \in M$ durch eine stetige Kurve verbinden lassen, die ganz in M liegt.

Definition 1.11. Ein *Gebiet* ist eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Ein Gebiet B heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sein Rand $\operatorname{Rd} B$ zusammenhängend ist.



Einfach zusammenhängendes Gebiet.



Nicht einfach zusammenhängendes Gebiet.

Bemerkung. Anschaulich gesprochen ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet ein „Gebiet ohne Löcher“.

Bemerkung. Die Orientierung des Randes wird so gewählt, dass der nach außen zeigende Normalvektor $\vec{n}$ und der Tangentenvektor $\vec{t}$ ein *Rechtssystem* $(\vec{n}, \vec{t})$ bilden.

Definition 1.12. Ein *Normalbereich* B_y bezüglich der y-Achse ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, für die es Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$B_y = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

(Für festes x entspricht der Bereich also genau der Strecke $g(x) \leq y \leq h(x)$.)

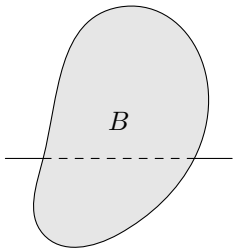
Analog definiere einen Normalbereich B_x bezüglich der x-Achse als

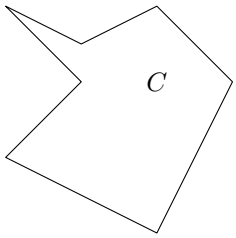
$$B_x = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Bemerkung. Einen Normalbereich kann man sich folgendermaßen vorstellen:

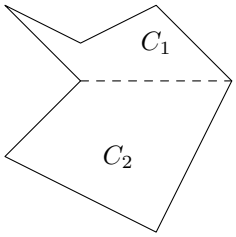
„Sticht“ man in einen Normalbereich B_y bezüglich y-Achse in y-Richtung, verlässt man B_y ein einziges Mal und betritt es nie wieder (ebenso B_x in x-Richtung).

Bemerkung. Jeder Bereich lässt sich in Normalbereiche unterteilen, wobei sich die Orientierung von „Schnittstücken“ gegenseitig aufhebt.





Kein Normalbereich.



Aufteilung in Normalbereiche.

Definition 1.13. Für $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ bezeichne $B_r(\vec{x}_0)$ die Menge aller Punkte, deren Abstand von $\vec{x}_0$ kleiner als r ist.

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^2$ entspricht das einem Kreis mit Mittelpunkt $\vec{x}_0$ und Radius r, im $\mathbb{R}^3$ einer Kugel.

Satz 1.1. Sei B ein Bereich und $C = \operatorname{Rd} B$ sein Rand. Sei weiters $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld. Dann gilt

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B = B_y$ ein Normalbereich bzgl. y-Achse (ansonsten zerlege den Bereich gemäß voriger Bemerkung in mehrere Normalbereiche). Dann kann das eine Bereichsintegral geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\iint_{B_y} \frac{\partial P}{\partial y}\ dx\ dy &= \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\ dy \\ &= \int_a^b P(x,h(x)) - P(x,g(x))\ dx \\ &= -\int_C P\ dx.\end{aligned}$$

(Beachte, dass C entgegengesetzt zu h und g durchlaufen wird, daher das negative Vorzeichen!)

Analog erhält man

$$\iint_{B_y} \frac{\partial Q}{\partial x}\ dx\ dy = \int_C Q\ dy$$

und schließlich durch Addieren die gewünschte Aussage. □

Folgerung. Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G. Dann sind Kurvenintegrale über $\vec{v}$ genau dann wegunabhängig, wenn die Integrabilitätsbedingung (IB)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{1.1}$$

erfüllt ist.

BEWEIS.
- „$\Longrightarrow$“: Sei (IB) erfüllt. Sei nun C eine beliebige geschlossene Kurve, die einen Bereich $B \subseteq G$ einschließt, also $C = \operatorname{Rd} B$. Dann gilt aufgrund des Satzes von Green-Riemann
$$\oint_C P\ dx + Q\ dy = \iint_B \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ wegen (IB)}}\ dx\ dy = 0.$$
Somit ist das Kurvenintegral wegunabhängig.

- „$\Longleftarrow$“: Sei nun umgekehrt $\vec{v}$ wegunabhängig. Betrachte einen Punkt $\vec{x} \in G$ und eine ε-Umgebung $B_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq G$ um $\vec{x}$. Da $\vec{v}$ wegunabhängig ist, ist das Kurvenintegral entlang $C = \operatorname{Rd} B_\varepsilon(\vec{x})$
$$\oint_C P\ dx + Q\ dy = 0.$$
Dies ist lt. Satz von Green-Riemann gleich dem Bereichsintegral über $B_\varepsilon(\vec{x})$, welches für $\varepsilon \to 0$ gegen $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ strebt. Das muss aber 0 sein, also folgt $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (IB). □

Bemerkung. Für nicht einfach zusammenhängende Gebiete G (also Gebiete mit „Löchern“) gilt die Aussage nicht. Eine geschlossene Kurve in G kann dann einen Bereich einschließen, der nicht vollständig in G liegt, sodass der Satz von Green-Riemann nicht angewendet werden kann.

Folgerung. Ein wegunabhängiges Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ besitzt ein Potential.

BEWEIS. Sei (x_0, y_0) fest. Betrachte die Funktion u mit

$$u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\ dx + Q\ dy.$$

Da $\vec{v}$ wegunabhängig ist, kann das Integral entlang des „achsenparallelen“ Wegs berechnet werden und es ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

Also ist u Potential von $\vec{v}$. □

1.2.4. Wegunabhängigkeit bei Gradientenfeldern

Satz 1.2. Im Fall eines Gradientenfeldes (= Feld mit Potential) liegt Wegunabhängigkeit vor.

BEWEIS. Im R^2 ist $\vec{v} = \operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$. Für $C: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$; $t_0 \le t \le t_1$, ist

$$\int_C \vec{v}\, d\vec{x} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x}\, dt + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y}\, dt.$$

Wegen der Kettenregel

$$\frac{du(x(t), y(t))}{dt} = u_x\dot{x} + u_y\dot{y}$$

folgt daher

$$\int_C \vec{v}\, d\vec{x} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{du}{dt} = u(P_1) - u(P_0).$$

wenn die Kurve C vom Punkt P_0 (dort ist $t = t_0$) zum Punkt P_1 ($t = t_1$) führt. □

Das Kurvenintegral reduziert sich also in diesem Fall auf die reine *Potentialdifferenz*. Die physikalische Arbeit im Gradientenfeld ist also gleich der Potentialdifferenz von End- und Anfangspunkt. Fallen End- und Anfangspunkt zusammen, ist folglich das Kurvenintegral (Ringintegral) gleich 0.

1.2.5. Bestimmung des Potentials

Ist ein Feld gegeben und das zugehörige Potential — falls existent — gesucht, so führt dies auf eine exakte DGL. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ muss bekanntlich im Fall eines Gradientenfeldes $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ gelten. Folglich ist u eine Stammfunktion des Differentials $P\,dx + Q\,dy$ (vgl. dazu die exakte DGL). Wie bei der exakten DGL ist auch hier die *Integrabilitätsbedingung (IB)* Voraussetzung für die Existenz eines Potentials:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Beispiel 1.8. Für obiges Feld mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist die IB wegen $P_y = Q_x = 0$ erfüllt. Durch Integration nach x erhält man aus der Ableitung nach x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \Rightarrow u(x, y) = \frac{x^2}{2} + \psi(y).$$

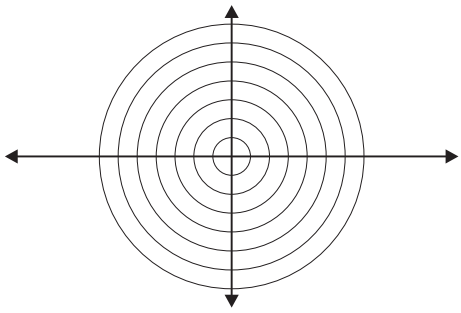
Nun differenziert man nach y und erhält

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \psi'(y) = Q = y \Rightarrow \psi(y) = \frac{y^2}{2} + K.$$

Das Potential ist somit bis auf eine additive Konstante bestimmt und lautet

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + K.$$

Die *Äquipotentiallinien* (Linien konstanten Potentials) sind in diesem Fall konzentrische Kreise.



Dass ein Kurvenintegral bei diesem Feld, wie zu erwarten ist, ebenfalls *wegunabhängig* ist, lässt sich einfach durch Integration über eine Äquipotentiallinie zeigen:

Beispiel 1.9.

$$W = \int_C x\,dx + y\,dy.$$

Die Gleichung der Kurve C ist die eines Kreises, also einer Äquipotentiallinie des Feldes mit $C : x^2 + y^2 = R^2$. Diese Gleichung muss allerding, um eine Integration zu ermöglichen, in eine Parameterform gebracht werden. Die übliche Parameterdarstellung eines Kreises ist

$$C : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad ; \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

Damit wird $dx = -R\sin t\,dt$ und $dy = R\cos t\,dt$. Durch Einsetzen in das Integral erhält man

$$W = \int_C x\,dx + y\,dy = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-R^2\cos t\sin t + R^2\cos t\sin t)}_{=0}\,dt = 0.$$

Beispiel 1.10. Das Feld $\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ besitzt kein Potential, was durch Berechnung desselben Integrals leicht gezeigt werden kann. Außerdem ist die IB mit $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial P}{\partial y}$ nicht erfüllt. für den Wert des Ringintegrals gilt

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} (-y\,dx + x\,dy) = R^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1}\,dt = 2\pi R^2.$$

Dieser Wert entspricht genau der doppelten Fläche der eingeschlossenen Kreisscheibe. Diese Erkenntnis folgt aus der bekannten Leibniz*'schen Sektorformel*:

$$\mathrm{Fl}(B) = \frac{1}{2}\oint_B (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint_B \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix}$$

2. Komplexe Funktionentheorie

2.1. Grundbegriffe über Funktionen im Komplexen

2.1.1. Einführung

Beispiel 2.1. Geht man von einem ebenen Vektorfeld aus, beispielsweise dem Gradientenfeld

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \ln \frac{1}{r} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{r^2} \\ -\frac{y}{r^2} \end{pmatrix}$$

(logarithmisches Potential), so ist unter Zuhilfenahme der GAUSS*'schen Zahlenebene* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}\,; i^2 = -1$ eine Interpretation als *komplexe Funktion* möglich. Der Vektor $\vec{v}$ kann als komplexe Zahl aufgefasst werden (dies gilt für jeden Vektor im $\mathbb{R}^2$).

Es gelten die üblichen Rechenregeln (wie im Reellen), die Definition des *Betrags* muss allerdings auf

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

erweitert werden.

Beispiel 2.2. Fasst man nun obiges Feld als komplexe Funktion auf, so erhält man mit

$$w = -\frac{x}{|z|^2} - i\frac{y}{|z|^2} = -\frac{1}{|z|^2}\underbrace{(x + iy)}_{=z} = -\frac{1}{|z|^2}z = -\frac{z}{z\bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}}$$

das folgende Ergebnis: Obiges Feld wird durch die komplexe Funktion $w(z) = -\frac{1}{\bar{z}}$ beschrieben.

Definition 2.1. Eine eindeutige Zuordnung, die der unabhängigen Variablen eine abhängige Variabe $w = w(z)$ zuordnet, heißt *komplexe Funktion*. Eine Deutung als ebenes Vektorfeld ist möglich. Dabei ist $u = \Re w$ und $v = \Im w$. Damit wird

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Die Definitionsmenge für eine komplexe Funktion ist ein Teilgebiet oder ganz $\mathbb{C}$.

Definition 2.2. Ein *Gebiet* ist eine offene und zusammenhängende Punktmenge, d.h. der Rand gehört nicht zum Gebiet.

Beispiel 2.3. Im Beispiel ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, da die Division durch Null auch im Komplexen nicht definiert ist.

2.1.2. Beispiele von Funktionen

Ein wichtiger Typ von Funktionen sind auch im Komplexen die *Polynome*:

$$w(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

Der Definitionsbereich für Polynome ist $D = \mathbb{C}$. Außerdem gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra, dass jedes Polynom n-ten Grades in $\mathbb{C}$ n Nullstellen besitzt.

Beispiel 2.4. Eine weitere Klasse von Funktionen bilden die *rationalen Funktionen*, die durch Division von Polynomen P und Q entstehen:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Der Definitionsbereich ist hier eingeschränkt. Da nicht durch Null dividiert werden darf, müssen die Nullstellen des Nennerpolynoms vom Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

2.1.3. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Definition 2.3. Eine Funktion $w = f(z)$ heißt *stetig in* z_0, falls für alle Punktfolgen $\langle z_n \rangle$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$$

gilt, d.h. der Feldvektor macht keine sprunghaften Änderungen. Eine Funktion $w = f(z)$ heißt stetig im Gebiet G, falls w in jedem Punkt $z_0 \in G$ stetig ist.

Satz 2.1 (Stetigkeitssatz). Die Stetigkeitseigenschaften bleiben bei Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten (außer bei den Nullstellen des Nenners) erhalten.

Folgerung. Polynome und rationale Funktionen sind im gesamten Definitionsbereich stetig.

Definition 2.4. Eine komplexe Funktion $w = f(z)$ heißt in z_0 *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(Limes des Differenzenquotienten) existiert. Als Bezeichnungsweise sei in diesem Fall zusätzlich die bereits bekannte

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$$

eingeführt.

Bemerkung. Alle Rechenregeln für das Differenzieren (Summen-, Produkt- und Kettenregel) im Reellen gelten auch für komplexe Funktionen. Ein Beweis soll hier nicht geführt werden, er erfolgt jedenfalls analog zum Reellen.

Beispiel 2.5.

$$(z^2 + z - 1)' = 2z + 1.$$

2.1.4. Potenzreihen im Komplexen

Analog zum Reellen kann man auch im Komplexen Funktionen in Potenzreihen (PR) entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Dabei ist z_0 der Entwicklungspunkt, a_n sind die Koeffizienten der Potenzreihe. Außerdem gilt der

Satz 2.2. Potenzreihen sind *konvergent* innerhalb des Konvergenzkreises mit dem Radius

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2.1.5. Hauptsatz über Potenzreihen

Satz 2.3. Innerhalb des Konvergenzkreises kann gliedweise addiert, multipliziert und differenziert werden. Der Konvergenzradius bleibt dabei erhalten.

Folgerung. Da man aus einer PR durch Differenzieren wieder eine PR erhält, folgt, dass eine PR unendlich oft differenzierbar ist.

Bemerkung. Im Reellen gibt es Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind, aber nicht in eine konvergente PR entwickelt werden können. Eine solche Funktion ist z.B. die bereits bekannte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Entwickelt man diese Funktion im Punkt 0 in eine TAYLOR-Reihe mit $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, so folgt aus $f^{(n)}(0) = 0$ eine PR, die identisch gleich Null ist. Da die Funktion selbst aber nur im Punkt 0 gleich 0 ist, kann sie nicht in eine PR entwickelt werden. Im Komplexen ist diese Funktion nicht differenzierbar (siehe später).

Definition 2.5. Eine Funktion, die in einem Punkt z_0 in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann, heißt *analytisch (regulär)* in z_0. Die Funktion heißt *analytisch im gesamten Definitionsbereich*, wenn sie in jedem Punkt analytisch ist.

Beispiel 2.6. Betrachte

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Der Konvergenzradius ist $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \infty$. Die Exponentialfunktion ist also analytisch im gesamten Definitionsbereich, da die PR in ganz $\mathbb{C}$ konvergent ist.

Beispiel 2.7. Betrachte

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Der Konvergenzradius ist hier, wie bereits bekannt, $R = 1$. Innerhalb des Einheitskreises um den Nullpunkt liegt also Konvergenz vor. Außerdem ist die gegebene Funktion sehr wohl in jedem Punkt $z_0 \neq 1$ analytisch, wie leicht gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} \\ &= \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^n}. \end{aligned}$$

Letztere PR ist einfach eine Reihe mit den Koeffizienten $a_n = \frac{1}{(1-z_0)^n}$ und dem Entwicklungpunkt z_0. Für den Konvergenzradius gilt (nach den bekannten Rechenregeln für PR)

$$|w| < 1 \Rightarrow \left| \frac{z-z_0}{1-z_0} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < |1-z_0|\,.$$

Bemerkung. Wie aus diesem Beispiel ersichtlich ist, geht der Konvergenzbereich jeweils bis zu einer Singularität der Funktion, also zu einer Stelle, wo f nicht differenzierbar ist.

2.1.6. Hauptsatz der komplexen Funktionentheorie

Definition 2.6. Eine im gesamten Definitionsgebiet G differenzierbare Funktion heißt *holomorph*.

Satz 2.4 (Hauptsatz der komplexen Funktionentheorie). Jede holomorphe Funktion ist im gesamten Definitionsgebiet analytisch.

Folgerung. Eine holomorphe Funktion ist unendlich oft differenzierbar.

Folgerung. Die Funktion

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$$

ist nicht holomorph, da sie an der Stelle $z_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

2.1.7. Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Satz 2.5. Sind zwei holomorphe Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ gleich auf einem Kurvenstück, dann sind sie identisch im gesamten Definitionsgebiet.

Folgerung. Ist eine holomorphe Funktion entlang der reellen Achse festgelegt, so ist die gesamte Funktion im Komplexen definiert.

BEWEIS. Seien $f(z)$ und $g(z)$ holomorph. Dann sind sie analytisch im Punkt $z_0 \in G$ (Kurve) und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

bzw.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Damit folgt aus $f(z_0) = g(z_0)$ die Gleichheit der konstanten Koeffizienten:

$$z := z_0 \Rightarrow a_0 = b_0.$$

Nun bildet man die Differenz der PR

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n$$

und dividiert unter der Voraussetzung $z \neq z_0$ durch $(z - z_0)$. Man erhält

$$\frac{f(z) - g(z)}{z - z_0} = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(z - z_0) + (a_3 - b_3)(z - z_0)^2 + \cdots$$

und bei Einführung des Grenzübergangs $z \to z_0$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - g(z)}{z - z_0} = 0 = (a_1 - b_1) + 0.$$

Beim Grenzübergang verschwinden alle Glieder mit $(z - z_0)$. Der Limes selbst ist wegen

$$\forall z \in G : \; f(z) = g(z)$$

gleich Null. Damit folgt aber direkt

$$a_1 - b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = b_1.$$

Für alle weiteren Koeffizienten wiederholt man den Vorgang sukzessive und erhält schließlich

$$f(z) \equiv g(z).$$ □

2.2. CAUCHY-RIEMANN'sche Differentialgleichungen und harmonische Funktionen

2.2.1. CAUCHY-RIEMANN'sche Differentialgleichungen

Wählt man wieder den Zugang über ebene Vektorfelder, so lässt sich eine komplexe Funktion darstellen als

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y).$$

Die Ableitung ist dann nach gewohnter Definition

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{[u(x,y) - u(x_0,y_0)] - i\,[v(x,y) - v(x_0,y_0)]}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)}.$$

Dabei ist allerdings zu beachten, dass der Limes hier eine *beliebige* Annäherung an den Punkt z_0 bedeutet. Die horizontale bzw. vertikale Annäherung sind nur spezielle Fälle. Rechnet man diese Spezialfälle durch, so erhält man für die horizontale Annäherung mit $y = y_0 = \text{const.}$

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{[u(x,y_0) - u(x_0,y_0)] + i[v(x,y_0) - v(x_0,y_0)]}{x - x_0} = u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0),$$

also die *partielle Ableitung nach x*, und für die vertikale Annäherung mit $x = x_0 = \text{const.}$

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{[u(x_0,y) - u(x_0,y_0)] + i[v(x_0,y) - v(x_0,y_0)]}{i(y - y_0)} = v_y(x_0,y_0) - i\,u_y(x_0,y_0).$$

Da die beiden Formeln bei Existenz der Ableitung denselben Wert ergeben müssen, erhält man damit die Cauchy-Riemann*'schen Differentialgleichungen*:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y), \\ v_x(x,y) &= -u_y(x,y). \end{aligned}$$

Anders formuliert: Eine im Komplexen differenzierbare Funktion erfüllt immer die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Außerdem gilt auch die Umkehrung.

Satz 2.6. Eine Funktion $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ ist in einem Gebiet G genau dann holomorph, wenn u und v im Reellen differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann'schen DGL gelten.

Beispiel 2.8. Gegeben sei die komplexe Funktion $f(z) = z^2$. Diese Funktion ist differenzierbar, da sie im Reellen differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann'schen DGL ergeben:

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2;\ v(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y;\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y;\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \Rightarrow u_x = v_y;\ v_x = -u_y$$

Bemerkung. Für die Funktion $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ sind die Cauchy-Riemann'schen DGL nicht erfüllt. Daher ist diese Funktion nicht holomorph.

2.2.2. Interpretation von komplexen Funktionen

Jede komplexe Funktion kann als Koordinatentransformation der z-Ebene auf die w-Ebene interpretiert werden. Von früher wissen wir, dass sich in jedem regulären Punkt zwei Koordinatenlinien schneiden. In solchen Punkten ist die Transformation eindeutig und daher die *Funktionaldeterminante* ungleich Null:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0.$$

Im obigen Fall ergibt sich: Die durch die holomorphe Funktion $f = u + i\,v$ definierte Koordinatentransformation ist in Punkten umkehrbar eindeutig, wo $f' \neq 0$ ist:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 \geq 0.$$

Daraus ergibt sich, dass die Funktionaldeterminante nur dann Null ist, wenn $u_x = u_y = 0$ und damit

$$f' = 0$$

ist.

Folgerung. Die durch eine holomorphe Funktion vermittelte Koordinatentransformation ist in allen Punkten $f'(z_0) \neq 0$ eindeutig umkehrbar.

Satz 2.7. Die durch die holomorphe Funktion $w = f(z)$ vermittelte Koordinatentransformation ist für $f'(z_0) \neq 0$ in einer Umgebung von z_0 eindeutig umkehrbar und winkeltreu. Schneiden sich zwei Kurven unter einem bestimmten Winkel in der xy-Ebene, so bleibt der Winkel bei einer Koordinatentransformation erhalten.

Beweis. Die Tangentenvektoren an 2 Kurven $z_1 = z_1(t)$ und $z_2 = z_2(t)$ im Punkt $p_0 = z_1(t_1) = z_2(t_2)$ sind gegeben durch

$$v_1 = \frac{dz_1}{dt}(t_1),$$
$$v_2 = \frac{dz_2}{dt}(t_2).$$

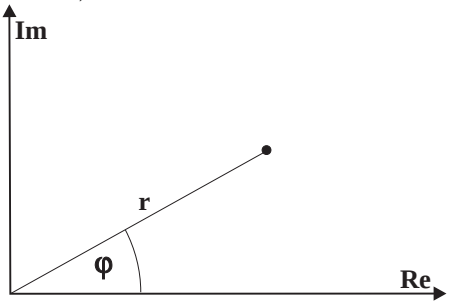
Führt man nun eine Koordinatentransformation durch, so ergeben sich die Tangentenvektoren an die transformierten Kurven als

$$w_1 = \frac{d}{dt}(f(z_1(t_1))) = \frac{df}{dz}(p_0)\frac{dz_1}{dt}(t_1),$$
$$w_2 = \frac{d}{dt}(f(z_2(t_2))) = \frac{df}{dz}(p_0)\frac{dz_2}{dt}(t_2).$$

Da sich die Tangentenvektoren nach der Transformation durch Multiplikation mit der Konstante $\frac{df}{dz}(p_0) \neq 0$ aus den ursprünglichen Tangentenvektorenn ergeben, sind die Winkel zwischen v_1 und v_2 bezwiehungsweise w_1 und w_2 gleich. □

Wiederholung: Festlegung von komplexen Zahlen mittels Polarkoordinaten

Neben der Darstellung als $z = x + iy$ kann eine komplexe Zahl (analog zur Darstellung eines Punktes in einer Ebene) auch in Form von Polarkoordinaten dargestellt werden:



Dabei gilt

$$r = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$-\pi < \varphi = \arg z \leq \pi.$$

Für den Winkel zwischen zwei komplexen Zahlen gilt

$$\measuredangle(z_1, z_2) = \arg\frac{z_2}{z_1}.$$

Definition 2.7. Umkehrbar eindeutige, winkeltreue Transformationen heißen *konforme Abbildungen.*

2.2.3. Harmonische Funktionen

Aus den CAUCHY-RIEMANN'schen DGL

$$u_x = v_y,$$
$$u_y = -v_x$$

ergibt sich als Folgerung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$
$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{xy} + u_{xy} = 0.$$

Bemerkung. Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion erfüllen die Potentialgleichung.

Definition 2.8. Eine Lösung u der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ heißt *harmonische Funktion* oder *Potentialfunktion.*

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 2.8. Sind Realteil und Imaginärteil einer Funktion harmonisch, so ist die Funktion holomorph. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des STOKES'schen Integralsatzes.)

Bemerkung. Der Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist durch den Realteil bis auf eine (rein imaginäre) Konstante eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist auch der Realteil durch den Imaginärteil bis auf eine (reelle) Konstante eindeutig festgelegt.

Beispiel 2.9. Gesucht sei der Imaginärteil der holomorphen Funktion f mit Realteil

$$u(x,y) = x^2 - y^2.$$

Dazu prüft man zuerst, ob die Funktion u harmonisch ist:

$$\Delta u = 2 - 2 = 0.$$

Nun setzt man in die Cauchy-Riemannschen Differetialgleichungen ein und erhält

$$\begin{aligned} u_x &= 2x = v_y, \\ u_y &= -2y = -v_x. \end{aligned}$$

Daraus können wir $v(x,y) = 2xy + c$ bestimmen. Für die Funktion f gilt also

$$f(x+iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy + c).$$

Bemerkung. Komplexe Funktionen können als komplexes Potential quellen- und wirbelfreier ebener Felder interpretiert werden, für die

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,y) &= \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \\ \mathrm{div}\vec{E} &= 0 \\ Q_x &= P_y \end{aligned}$$

gilt. Man ordnet $\vec{E}(x,y)$ die komplexe Feldfunktion $f(z) = f(x+iy) = P + iQ$ zu. Bei den komplexen Funktionen treten an die Stelle der Integrabilitätsbedingung die Cauchy-Riemann'schen DGL:

$$\begin{aligned} f(z) &= P + iQ, \\ P_x &= -Q_y, \\ Q_x &= P_y. \end{aligned}$$

Definition 2.9. Eine Stammfunktion $F(z)$ von $f(z)$ heißt *komplexes Potential* des Feldes.

Bemerkung. Mit

$$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

ergibt sich

$$f = F'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y)$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned} U_x &= P \\ V_x &= -Q = -U_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} U_x &= P \\ U_y &= Q \end{aligned}\right.$$

Der Realteil des komplexen Potentials ist also das reelle Potential des Feldes.

2.2.4. Zusammenfassung

- Ist f in einem Gebiet G differenzierbar, so ist f holomorph in G.
- Ist f in einem Gebiet G differenzierbar, so ist f analytisch in G, d.h. in konvergente Potenzreihen entwickelbar. Dabei muss der Konvergenzkreis aber als gesamtes im Gebiet G liegen.
- Mit $f = u + iv$ und $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ergeben sich die CAUCHY-RIEMANN'schen DGL

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

- u und v sind genau dann harmonisch, wenn $\Delta u = \Delta v = 0$ gilt.
- Das ebene Vektorfeld $\vec{E} = \vec{E}(z)$ ist quellen- und wirbelfrei, wenn $f(z) = \overline{\vec{E}(z)}$ holomorph ist.

2.3. Elementare Funktionen in $\mathbb{C}$

2.3.1. Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist definiert als

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

Sie ist holomorph, ihr Konvergenzradius ist $R = \infty$.

2.3.2. Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind im Komplexen definiert als

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Es ergeben sich die gleichen Reihenentwicklungen wie im Reellen, die Funktionen stimmen also mit den üblichen Definitionen (im Reellen) überein.

Satz 2.9 (Permanenzprinzip der elementaren Funktionen).
Alle üblichen Formeln aus dem Reellen bleiben auch in $\mathbb{C}$ erhalten, es gelten also EULER'sche Formel, Additionstheoreme usw.

BEWEIS. Die Begründung folgt aus dem Identitätssatz, da $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. □

Beispiel 2.10. Berechne $e^z = e^{x+iy}$. Es gilt

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Aus den Rechenregeln für Potenzen ergibt sich

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Folgerung. Da die Winkelfunktionen periodisch mit Periode 2π sind, heißt das, dass auch die Exponentialfunktion periodisch ist, weil

$$e^{z+2k\pi i} = e^z$$

gilt.

2.3.3. Nullstellen der Exponentialfunktion

Aus $e^z = 0$ folgt

$$e^x \cos y = 0,$$
$$e^x \sin y = 0,$$

was aber nicht gleichzeitig erfüllt sein kann. Die Exponentialfunktion besitzt also auch im Komplexen keine Nullstelle.

2.3.4. Nullstellen der trigonometrischen Funktionen

Die Ermittlung erfolgt auch hier wie im Reellen:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Rightarrow e^w = 1 \Rightarrow w = 2k\pi i,$$

somit

$$z = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Analog ergibt sich für die Nullstellen des Cosinus

$$z = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Man beobachte, dass im Komplexen

$$\cos(iz) = \cosh z,$$
$$\sin(iz) = i\,\sinh z$$

gilt.

2.3.5. Weitere trigonometrische Funktionen

Für die Tangensfunktionen gelten die im Reellen üblichen Definitionen

$$\begin{aligned}\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z},\\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z},\\ \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z},\\ \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}.\end{aligned}$$

Definition 2.10. Das *Holomorphiegebiet* ist der größte mögliche Definitionsbereich, in dem eine Funktion $f(z)$ holomorph ist.

Im Fall der obigen Funktionen ist das Holomorphiegebiet ganz $\mathbb{C}$ ohne die Nullstellen des Nenners, beim Tangens also

$$\left\{z \in \mathbb{C}; z \notin \left\{\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots\right\}\right\}.$$

Für den hyperbolischen Tangens ergibt sich als Einschränkung für das Holomorphiegebiet die Bedingung $\cosh z = 0$, die im Reellen nicht erfüllbar ist. Im Komplexen dagegen gilt

$$\cosh z = \cosh(-z) = \cos iz.$$

Die Nullstellen des Cosinus aber sind

$$iz = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

somit

$$z = -i(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Die Nullstellen des hyperbolischen Cosinus liegen also auf der imaginären Achse.

Bemerkung. Der hyperbolische Cosinus ist periodisch entlang der imaginären Achse.

Die Ermittlung des Holomorphiegebiets für die Cotangens-Funktionen erfolgt analog durch Ermittlung der Nullstellen der entsprechenden Sinusfunktionen.

2.3.6. Komplexer Logarithmus

Der Logarithmus stellt die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion dar. Da wir aber wissen, dass die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ periodisch ist, existiert keine eindeutige Umkehrung im ganzen Definitionsgebiet.

Um hier eine Lösung zu finden, zieht man die Polardarstellung einer komplexen Zahl zu Hilfe:

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit

$$\begin{aligned}r &= |z|,\\ \varphi &= \arg z.\end{aligned}$$

Nun sei als *Hauptwert des Arguments* der Wert

$$-\pi < \operatorname{Arg} z = \varphi \leq \pi$$

festgelegt, d.h.

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi.$$

Dies führt (für $r \neq 0$) zu folgender

Definition 2.11.

$$\log z = \ln r + i \arg z = \ln r + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i; \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Der Logarithmus ist im Komplexen eine mehrdeutige Funktion für beliebige ganzzahlige k. Für jedes k gibt es einen Wert (Zweig) des Logarithmus. Als *Hauptwert des Logarithmus* bezeichnet man den Wert

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i \operatorname{Arg} z.$$

Beispiel 2.11.

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(-2) &= \ln 2 + i\pi \\ \operatorname{Log}(-1) &= \ln 1 + i\pi = i\pi \\ \operatorname{Log} i &= \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln, z.B.

$$\log z_1 + \log z_2 = \underbrace{\ln r_1 + \ln r_2}_{\ln(r_1 r_2)} + \underbrace{i(\arg z_1 + \arg z_2)}_{\arg(z_1 z_2)} = \log(z_1 z_2)$$

Diese Formel stimmt aber *nicht* für Hauptwerte im allgemeinen!

Beispiel 2.12.

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}(-1) &= 2\pi i, \\ \operatorname{Log}((-1)\cdot(-1)) &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung. Für positive reelle Zahlen wird $\log z = \ln z$, für $z = 0$ ist der Logarithmus auch im Komplexen nicht definiert.

Etwas eigenartiger ist das Holomorphiegebiet des Logarithmus gestaltet. Da $\operatorname{Arg} z$ unstetig entlang der negativen reellen Achse ist, ist hier auch der Logarithmus nicht holomorph. Als Holomorphiegebiet ergibt sich daher die *geschlitzte Ebene*, das komplexe Gebiet ausgenommen 0 und die negative reelle Achse:

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus R_0^-.$$

Die Überprüfung der Holomorphie kann durch die Cauchy-Riemann'schen DGL erfolgen:

$$\operatorname{Log} z = \underbrace{\ln \sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + \underbrace{i \arctan \frac{y}{x}}_{i\,v(x,y)}.$$

Die angegebenen Funktionen sind außer im Nullpunkt unendlich oft differenzierbar.

Eine Interpretation kann über das logarithmische Potential gegeben werden. Stellt man sich im Punkt $z_0 = 0$ eine punktförmige Ladung vor, so erhält man mit der Feldfunktion $f(z) = -\frac{1}{z}$ ein komplexes Potential mit $F' = f$.

Bemerkung. $\operatorname{Log} z$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ in $\tilde{\mathbb{C}}$.

Beweis. Sei $F(z) = \operatorname{Log}(z)$.

$$F'(z) = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}.$$ □

Wir erhalten also das komplexe Potential $F(z) = -\operatorname{Log} z = -(\ln r + i \operatorname{Arg} z)$, die Äquipotentiallinien ergeben sich als konzentrische Kreise um den Nullpunkt aus $\ln r = \text{const.}$, die Feldlinien als Strahlen von 0 ausgehend aus $\operatorname{Arg} z = \text{const.}$.

Bemerkung. Es gilt auch allgemein, dass sich Äquipotenziallinien und Feldlinien in Wirbelfreien Feldern immer unter einem Winkel von 90° schneiden.

Bemerkung. Da $\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{y}{x}$ nur im 1. und 4. Quadranten gilt, muss man im 2. und 3. Quadranten von einer veränderten Definition ausgehen:

$$\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{y}{x} \pm \pi.$$

2.3.7. Potenzfunktionen

Definition 2.12. Die allgemeine α-Potenz ist im Komplexen als

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

definiert

Diese Definition stellt an sich keine Neuigkeit dar, muss aber weiter untersucht werden: Man stellt fest, dass die Potenz keine eindeutige Funktion ist, da der Logarithmus im Komplexen nicht eindeutig ist. Man definiert daher auch hier einen *Hauptwert*:

Definition 2.13.

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}.$$

Wie gewohnt bleiben auch die üblichen Rechenregeln erhalten, wie z.B. beim Differenzieren:

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = e^{\alpha \log z} \alpha \cdot \frac{1}{z} = z^\alpha \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha-1}$$

Potenziert man mit einer ganzen Zahl, so erhält man wie gewohnt ein *eindeutiges* Ergebnis:

$$z^m = e^{m \log z} = e^{m(\log|z| + i\varphi + 2k\pi i)} = e^{m(\log|z|+i\varphi)} \cdot \underbrace{e^{2k\pi i \cdot m}}_{=1 \forall m \in Z}.$$

Ähnliche Überlegungen lassen sich in Hinsicht auf die Berechnung von Wurzeln anstellen. Die Quadratwurzel ergibt sich aus

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\log z + 2k\pi i)} = e^{\frac{1}{2}\log z + k\pi i} = e^{\frac{1}{2}\log z} \cdot e^{k\pi i}$$

Der Faktor $e^{k\pi i}$ kann zwei verschiedene Werte anehmen, nämlich $+1$ und -1. Man erhält also zwei Lösungen, die sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Für die m-te Wurzel ergeben sich dazu analog m verschiedene Werte:

$$\sqrt[m]{z} = z^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\log z} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

Der entsprechende Hauptwert ergibt sich aus $k = 0$.

Bemerkung. Für die Hauptwerte ist das Holomorphiegebiet wieder $\tilde{\mathbb{C}}$.

2.3.8. Arcus- und Areafunktionen

Arcuscosinus

Aus der Definition des Cosinus über die Exponentialfunktion $w = \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ kann die Umkehrfunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned} 2w &= e^{iz} + e^{-iz} \\ 2w &= u + \frac{1}{u} \\ u^2 - 2wu + 1 &= 0 \\ u &= w \pm \sqrt{w^2 - 1} \\ e^{iz} &= w \pm \sqrt{w^2 - 1} \\ iz &= \log\left(w \pm \sqrt{w^2 - 1}\right) \\ z &= -i \log\left(w \pm \sqrt{w^2 - 1}\right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\arccos w = -i \log\left(w \pm \sqrt{w^2 - 1}\right).$$

Es handelt sich wieder um eine mehrdeutige Funktion. Der Hauptwert ist

$$\operatorname{Arccos} w = -i \operatorname{Log}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right).$$

Arcussinus

Die Ermittlung der Umkehrfunktion des Sinus $w = \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ erfolgt analog, man erhält

$$\arcsin w = -i \log\left(iw \pm \sqrt{1 - w^2}\right).$$

Der Hauptwert ist hier

$$\operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Log}\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right).$$

Arcustangens, Arcuscotangens

Die zusammengesetzten Funktionen können analog zu oben berechnet werden.

Areasinushyperbolicus

Wie bei den Arcusfunktionen erhält man aus $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$ mit der Substitution $e^z = u$ eine quadratische Gleichung, deren Lösung die Umkehrfunktion ergibt:

$$\operatorname{arsinh} w = \log\left(w \pm \sqrt{w^2 + 1}\right).$$

Der Hauptwert ist

$$\operatorname{Arsinh} w = \operatorname{Log}\left(w + \sqrt{w^2 + 1}\right).$$

2.4. Komplexe Kurvenintegrale

Gegeben sei eine komplexe Funktion $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, sowie eine Kurve C im Komplexen, die durch eine Parameterdarstellung $\gamma = \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $\alpha \leq t \leq \beta$ gegeben sei. Voraussetzung dafür, dass ein Kurvenintegral in diesem Fall wie im Reellen berechenbar ist, ist, dass die Kurve stückweise stetig differenzierbar ist. Dann gelten folgende Definitionen:

Definition 2.14.

$$dz = dx + i\,dy,$$
$$dz = \dot{x}\,dt + i\dot{y}\,dt = (\dot{x} + i\dot{y})\;dt = \dot{z}\,dt.$$

Definition 2.15.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(z) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt.$$

Daraus folgt in kartesischen Koordinaten

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)(dx + i\,dy) = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy.$$

Es sind also zwei reelle Kurvenintegrale zu berechnen.

Beispiel 2.13. Gegeben sei die Funktion $f(z) = z^2$, sowie die Kurve $z(t) = (1 + i)t$ mit $0 \leq t \leq 1$. Das Kurvenintegral berechnet sich daraus als

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C z^2(t) \cdot \dot{z}(t)\,dt = (1+i)^2 \int_0^1 t^2(1+i)\,dt = (1+i)^3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

Bemerkung. Besteht die Kurve aus mehreren Stücken, so werden die Kurvenintegrale über die Teilstücke einfach addiert.

Bemerkung. Obiges Kurvenintegral kann natürlich auch auf eine andere Art berechnet werden, indem man die reellen Teilintegrale auswertet, und zwar mit den Funktionen

$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$
$$v(x, y) = 2xy.$$

Das Kurvenintegral ist dann

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy.$$

2.4.1. Rechenregeln

Es gelten die bekannten Rechenregeln.

Linearität

$$\int [f(z) + g(z)]\, dz = \int f(z)\, dz + \int g(z)\, dz.$$
$$\int a\, f(z)\, dz = a \int f(z)\, dz.$$

Dreiecksungleichung

$$\left| \int f(z)\, dz \right| \leq \int |f(z)|\, |dz|\,.$$

Mit

$$|dz| = |dx + i\, dy| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$$

(der Definition für das *Bogenelement*) erhält man ein *reelles skalares Kurvenintegral*

$$\int |f(z)|\, |dz| = \int |f(z)|\, ds.$$

Daraus ergibt sich, dass für $M \geq \max |f(z)|$

$$\left| \int f(z)\, dz \right| \leq M \int ds = M \cdot \text{Länge von C}$$

gilt.

Stammfunktion

Sei F eine Stammfunktion von f in einem Gebiet, das die Kurve

$$C : z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$$

enthält. Dann gilt

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C F'(z)\, dz = \int_\alpha^\beta \underbrace{F'(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\, dt}_{= \frac{dF(z(t))}{dt}\, dt} = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(z(t))\, dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Beispiel 2.14. In obigem Beispiel ergibt sich so mit

$$f(z) = z^2 \Rightarrow F(z) = \frac{z^3}{3}$$

für das Integral

$$\int_C z^2\, dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

Bemerkung. Wie bereits bekannt, gibt es für die Funktion $f(z) = z^n$ zwei verschiedene Stammfunktionen:

$$F(z) = \begin{cases} \frac{z^{n+1}}{n+1} & \text{für } n \neq -1, \\ \operatorname{Log} z & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Folgerung. Falls f eine Stammfunktion in einem Gebiet besitzt, das die geschlossene Kurve C enthält, dann ist

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Daraus ergibt sich, dass bei obiger Funktion für $n \neq -1$ das Ringintegral

$$\oint_C z^n\,dz = 0$$

ergibt, nicht aber für $n = -1$, da für den Logarithmus der Nullpunkt aus dem Holomorphiegebiet ausgenommen ist. Das Ringintegral ergibt hier

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}\,dt}{Re^{it}} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i.$$

2.4.2. Integralsatz von Cauchy

Satz 2.10. Sei $f(z)$ holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet und sei C eine geschlossene Kurve im Gebiet. Dann gilt

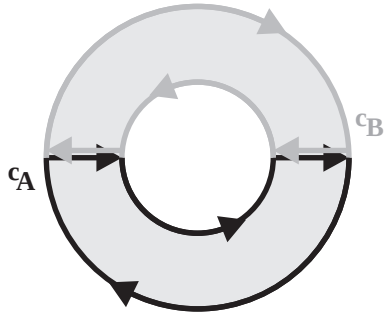
$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Ein Beweis ergibt sich sofort aus den reellen Integralen (siehe Gleichung 2.4), indem man die Cauchy-Riemann'schen DGL als Integrabilitätsbedingung benützt und den Stokes'schen Integralsatz anwendet.

Bei Ringgebieten mit dem äußeren Rand C_1 und dem inneren Rand C_2 verändert sich diese Formel zu

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz.$$

Um dies einzusehen, berechnet man einfach zwei getrennte Ringintegrale nach folgender Aufteilung:



Da es sich bei beiden Kurven um geschlossene Kurven handelt, ergeben beide Ringintegrale

$$\oint_{c_A} f(z)\,dz = \oint_{c_B} f(z)\,dz = 0.$$

Addiert man nun beide Ringintegrale, so erhält man nichts Anderes als die Summe der beiden Ringintegrale von äußerem und innerem Rand, da sich die Stücke, die das Gebiet durchqueren, aufgrund ihrer entgegengesetzten Orientierung aufheben, er ergibt sich die obige Formel. □

Als weitere Folgerung ergibt sich die CAUCHY*'sche Integralformel (CIF)*:

Satz 2.11. Sei f holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und z_0 ein Punkt aus G. Dann gilt für eine Kurve in G, die z_0 einmal umrundet:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

BEWEIS. Der Wert dieses Integrals ist von C unabhängig, solange z_0 im Inneren von C liegt. Daher gilt

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \underbrace{\oint_{C_2} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz}_{=I_1} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz}_{=I_2}.$$

Das zweite Ringintegral ist sehr einfach zu berechnen:

$$I_2 = f(z_0) \oint_{C_2} \frac{dz}{z - z_0} \overset{z - z_0 := w}{=} f(z_0) \oint_{C_2} \frac{dw}{w} = 2\pi i f(z_0).$$

Nun ist noch zu zeigen, dass I_1 gegen Null geht. Dies gelingt mit Hilfe der Tatsache, dass der Differenzenquotient für $z \to z_0$ bei holomorphen Funktionen gegen den Differentialquotienten geht und daher beschränkt ist. Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich daher

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq M$$

und weiter

$$|I_1| \leq M \cdot \text{Länge von } C_2 = M \cdot 2\pi\varepsilon.$$

Dieser Wert geht aber für $\varepsilon \to 0$ ebenfalls gegen Null. □

Folgerung. Ein wirbel- und quellenfreies ebenes Feld in einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist eindeutig durch die Vorgabe entlang einer Randkurve C bestimmt, und zwar als „Integralmittelwert".

Folgerung. Durch Differenzieren unter dem Integralzeichen erhält man auch die Ableitungen:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$
$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz,$$
$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\, dz,$$
$$f'''(z_0) = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^4}\, dz,$$

und allgemein

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Bemerkung. Daraus resultiert eine Methode zum Berechnen von Integralen, die ansonsten mittels Parametrisierung berechnet werden müssten, was in der Regel sehr arbeitsaufwendig ist.

2.5. Residuenkalkül

Beispiel 2.15. Es soll das reelle Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^{2p} x \, dx$$

mit $p \in \mathbb{N}$ berechnet werden. Dazu drückt man den Cosinus gemäß Definition durch die Exponentialfunktion aus $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und substituiert $z := e^{ix}$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$. Man erhält

$$I = \frac{1}{2^{2p}} \int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p} dx = \frac{-i}{2^{2p}} \oint \left(z^{2p} + z^{2p-1} \cdot \frac{1}{z} \cdot \binom{2p}{1} + \cdots\right) \frac{dz}{z}.$$

Wegen $\oint z^n \, dz = 0$ für $n \neq -1$ fallen alle Integrale bis auf $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ weg, das Gesamtintegral ist daher

$$I = \frac{-i}{2^{2p}} \oint \binom{2p}{p} \frac{dz}{z} = \frac{\binom{2p}{p}\pi}{2^{2p-1}} = \frac{(2p)!\pi}{(p!)^2 2^{2p-1}}.$$

2.5.1. Laurent-Entwicklung und Residuum

Definition 2.16. Ist f in einem Gebiet G bis auf z_0 holomorph, so lässt sich die Funktion f in einer eindeutig bestimmten Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

darstellen. Dabei ist

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

Die Laurent-Reihe reduziert sich auf eine Potenzreihe, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$. In diesem Fall existiert an der Stelle z_0 eine *hebbare* Lücke, die Funktion f ist auf ganz G holomorph. Existiert dagegen ein $a_{-n} \neq 0$ mit $a_{-n-1} = a_{-n-2} = \cdots = 0$, dann wird z_0 als *Polstelle* bezeichnet.

Beispiel 2.16. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{z+1} + \frac{z}{2i(z-i)} - \frac{z}{2i(z+i)}$$

besitzt an den Stellen $z_1 = -1$, $z_2 = i$ und $z_3 = -i$ je einen Pol *erster Ordnung*.

Definition 2.17. Der Koeffizient a_{-1} wird als das *Residuum* bezeichnet.

Es kann berechnet werden, indem man eine Funktion f mit einem Pol n-ter Ordnung mit $(z - z_0)^n$ multipliziert und anschließend wiederholt differenziert:

$$\operatorname{Res} f = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}\left[(z - z_0)^n f(z)\right]}{dz^{n-1}}$$

Mit Hilfe des Residuums lassen sich einfach Integrale berechnen. Man verwendet dazu folgenden

Satz 2.12 (Residuensatz).

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_i} n(C, z_j) \cdot \mathrm{Res}[f; z_j],$$

wobei $n(C, z_j)$ die Anzahl der Windungen ist, die die Kurve um den Entwicklungspunkt z_j vollführt. Über die Entwicklungspunkte z_j wird summiert.

Beispiel 2.17. Sei die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

gegeben. Ihre Pole erhält man aus $z^4 + 1 = 0$, d.h. $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $z_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Das Residuum ist

$$\mathrm{Res}[f; z_1] = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}.$$

Dies entspricht aber, wenn man den Zähler der rationalen Funktion mit $A(z)$ und den Nenner mit $B(z)$ bezeichnet, auch folgender Darstellung:

$$\mathrm{Res}[f; z_1] = \lim_{z \to z_1} \frac{A(z)}{\frac{B(z) - B(z_1)}{z - z_1}}.$$

Dieser Grenzwert kann mit Hilfe der Grenzwertsätze und der Tatsache, dass es sich bei Zähler und Nenner um holomorphe Funktionen handelt, berechnet werden. Er ist

$$\mathrm{Res}[f; z_1] = \frac{A(z_1)}{\lim_{z \to z_1} \frac{B(z) - B(z_1)}{z - z_1}} = \frac{A(z_1)}{B'(z_1)}.$$

Da $B'(z_1)$ aber nur für Pole 1. Ordnung ungleich Null ist, gilt diese Beziehung im Gegensatz zu obiger allgemeiner Darstellung nur für Pole erster Ordnung:

$$\mathrm{Res}[f; z_1] = \frac{A(z_1)}{B'(z_1)}.$$

Beispiel 2.18 (Fortsetzung).

$$\mathrm{Res}[f; z_1] = \frac{1}{4 \cdot e^{\frac{3\pi}{4} i}} = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}}.$$

Analog dazu ist

$$\mathrm{Res}[f; z_2] = \frac{1}{4 \cdot e^{\frac{9\pi}{4} i}} = \frac{1 - i}{4\sqrt{2}}.$$

2.5.2. Berechnung von reellen Integralen

Beispiel 2.19. Sei das Integral über die obige Funktion und einen Halbkreis mit Radius R in der komplexen Zahlenebene zu berechnen. Nach dem Residuensatz gilt

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}[f; z_j] = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Dabei werden natürlich nur die Pole *innerhalb der Kurve* berücksichtigt; in diesem Fall sind es, wie oben angeführt, zwei Stück.

Beispiel 2.20 (Normierung der STUDENT-Verteilung). Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+3)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{z^2}{3}+1\right)^2}.$$

Aus dieser Funktion ergibt sich durch Normierung die bereits aus der Statistik bekannte STUDENT-Verteilung. Normierung bedeutet dabei, dass eine Dichtefunktion entsteht, indem man die Funktion mit einem Faktor derart multipliziert, dass das uneigentlichen Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 1$ ergibt. Dazu berechnet man das *uneigentliche reelle Integral*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2}.$$

Da es sich um ein Nennerpolynom 4. Grades handelt, muss es vier Nullstellen geben. Durch Nullsetzen des Nenners erhält man aber

$$z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm\sqrt{3}i.$$

Es handelt sich also um Pole 2. Ordnung. Das Residuum muss daher mittels unbestimmten Ansatzes bestimmt werden:

$$\frac{1}{(z^2+3)^2} = \frac{C_{-2}}{(z-\sqrt{3}i)^2} + \frac{C_{-1}}{(z-\sqrt{3}i)} + C_0 + C_1(z-\sqrt{3}i) + \cdots .$$

Man multipliziert nun mit $(z-\sqrt{3}i)^2$ und erhält

$$\frac{1}{(z+\sqrt{3}i)^2} = C_{-2} + C_{-1}(z-\sqrt{3}i) + C_0(z-\sqrt{3}i)^2 + \cdots .$$

Nun setzt man $z = \sqrt{3}i$ ein und erhält

$$C_{-2} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}i}\right)^2 = \left(\frac{-i}{2\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{1}{12}.$$

Nun differenziert man zur Bestimmung des Residuums den unbestimmten Ansatz einmal:

$$\frac{-2}{(z+\sqrt{3}i)^3} = C_{-1} + 2C_0(z-\sqrt{3}i) + \cdots .$$

Es wird wieder $z = \sqrt{3}i$ eingesetzt, und es ergibt sich das Residuum

$$C_{-1} = \frac{-2}{(2\sqrt{3}i)^3} = \frac{-2i}{8\cdot 3\sqrt{3}} = -\frac{i}{12\sqrt{3}}.$$

Analog verfährt man für den zweiten Pol.

Bemerkung. Der unbestimmte Ansatz liefert schrittweise alle Koeffizienten $C_{-j}, C_{-j+1}, \ldots, C_{-1}$, also den Hauptteil der Funktion.

Beispiel 2.21. Gesucht sei das Integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx.$$

Dazu verwendet man

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

und substituiert

$$z = e^{ix} \quad \text{d.h.} \quad dz = i\, e^{ix}\, dx \Longrightarrow dx = \frac{dz}{iz},$$

Dann berechnet man das entstandene komplexe Kurvenintegral über den Residuensatz:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx = \oint_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}[f; z_j].$$

2.5.3. Uneigentliche reelle Integrale

Wenn man ein Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

berechnen will, so muss vorausgesetzt werden, dass $|z \cdot f(z)|$ gleichmäßig gegen Null geht für $z \to \infty$. Dabei ist es unerheblich, in welche Richtung das Wachstum gegen Unendlich durchgeführt wird, es muss für jede beliebige Richtung gelten. Bei rationalen Funktionen ist dies sichergestellt, wenn der Grad des Nenners um mindestens zwei größer als der Grad des Zählers ist.

Beispiel 2.22.

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+3)^2}.$$

Die Gradbedingung ist, wie leicht nachgeprüft werden kann, erfüllt. Es wird nun über einen Halbkreis mit Radius R integriert. Man erhält

$$\oint_C f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+3)^2} + \underbrace{\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{(R^2 e^{2it}+3)^2} \cdot Re^{it}\, dt}_{I_R}.$$

Nun gilt aber

$$|I_R| \le \int_0^{\pi} \frac{R}{R^4}\, dt = \pi \frac{1}{R^3}.$$

Dieser Ausdruck geht aber für wachsende R gegen Null. Somit kann das uneigentliche Integral selbst nach dem Residuensatz berechnet werden. Innerhalb des Halbkreises liegt nur einer der beiden Pole, daher gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}[f; \sqrt{3}i] = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

2.6. FOURIER-Transformation

Wiederholung: FOURIER-Reihen im Komplexen Sei $f(x)$ eine $2L$-periodische Funktion. Dann ist

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

mit

$$a_n = \frac{1}{L} \int f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx,$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

Drückt man nun Sinus und Cosinus durch die Exponentialfunktionen aus, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right) - i b_n \left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right) \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi i}{L}x}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten werden aus den bekannten Formeln berechnet:

$$\begin{aligned} 2c_n &= a_n - i b_n = \\ &= \frac{1}{L} \int f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx - i \frac{1}{L} \int f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \left[\cos \frac{n\pi}{L} x - i \sin \frac{n\pi}{L} x \right] dx = \\ &= \frac{1}{L} \int f(x) e^{-\frac{n\pi}{L} i x} \, dx. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$c_n = \frac{1}{2L} \int f(x) e^{-\frac{n\pi}{L} i x} \, dx.$$

FOURIER-Darstellung nicht-periodischer Funktionen.
Eine beliebige Funktion kann als periodische Funktion mit unendlich großem Periodenintervall angesehen werden. Für ein gegebenes Intervall zerlegt man dieses in ein Raster. Mit der Abkürzung $u = \frac{n\pi}{L}$ erhält man eine Hilfsfunktion

$$C_L(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-uix} \, dx.$$

Daraus ergibt sich für die FOURIER-Koeffizienten auf $[-L, L]$

$$c_n = \frac{\pi}{L} C_L(u_n).$$

Die Länge des Zerlegungsintervalls ist

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = (n+1)\frac{\pi}{L} - n\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Nun kann eine FOURIER-Reihe (auf $[-L, L]$) entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_L(u_n) e^{iu_n x} \Delta u_n.$$

Diese Summe konvergiert für $L \to \infty$ gegen das Integral

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux}\, dx$$

und man erhält das FOURIER'sche Integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iux}\, du.$$

Satz 2.13. Sei $f(x)$ eine auf $(-\infty, \infty)$ definierte Funktion und dort integrierbar, d.h. "stark abklingend". Dann ist f darstellbar als

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iux}\, du$$

mit

$$c(u) = \hat{f}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux}\, dx.$$

Bemerkung. "Bandbegrenzte Funktionen", d.h. solche Funktionen, deren FOURIER-Transformierte nur in einem Intervall $[A, B]$ von null verschieden sind, erfüllen obige Voraussetzung.

Definition 2.18. $\hat{f}(u)$ heißt die FOURIER**-Transformierte** von f. Schreibe

$$\hat{f} = \mathcal{F} f.$$

Es handelt sich dabei um eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g,$$
$$\mathcal{F}(a \cdot f) = a \cdot \mathcal{F}f.$$

Bemerkung. Die Umkehrformel ergibt sich aus

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) e^{iux}\, dx = 2\pi \overline{\mathcal{F}(\hat{f})}$$

für eine reellwertige Funktion f. Eine Bezeichnungsweise ist auch

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} \hat{f}.$$

Folgerung. Die FOURIER-Transformation ist eine eindeutig umkehrbare Integral-Transformation:

$$\mathcal{F}^{-1} = 2\pi\overline{\mathcal{F}}.$$
$$\mathcal{F}^{-1}(x) = 2\pi\mathcal{F}(-x).$$

Beispiel 2.23. Die DIRICHLET*'sche Sprungfunktion* ist definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

Hier ist

$$c(u) = \hat{f}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-iux}\,dx =$$
$$= \left[\frac{-1}{2\pi iu}e^{-iux}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2\pi iu} = \frac{\sin u}{\pi u}.$$

Die Funktion ist also

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{\pi u} e^{iux}\,du.$$

Bemerkung. Das FOURIER'sche Integral an der Sprungstelle dieser Funktion hat den Wert

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Folgerung (für $x = 0$).

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{\pi u}\,du \Longrightarrow \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

Dieses Integral findet Anwendung in der Signalverarbeitung.

Beispiel 2.24. Die CAUCHY-Verteilung besitzt eine Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Durch eine FOURIER-Transformation erhält man die sogenannte *Charakteristik* der Verteilung:

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux}}{1+x^2}\,dx.$$

Dies ist ein uneigentliches Integral vom Typ $e^{imx} \cdot f(x)$, dessen Lösung mit dem Residuensatz gelingt. Die Voraussetzung ist erfüllt, da die Funktion, mit der multipliziert wird, für wachsende x sicher gegen Null geht. Als Lösung ergibt sich über eine Fallunterscheidung ($u < 0$ und $u \geq 0$) und daraus

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{2}e^{-|u|}.$$

Satz 2.14 (Abtastsatz von SHANNON). Sei f eine bandbegrenzte Funktion, deren FOURIER-Transformierte $\hat{f}$ nur auf dem Intervall $[-b, b]$ von Null verschiedene Werte besitzt. Dann gilt für alle $T \in (0, \frac{\pi}{b})$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(x - kT)\right)$$

wobei $\mathrm{sinc}\, y := \dfrac{\sin y}{y}$ den **Sinus cardinalis** bezeichnet.

BEWEIS. Wegen $0 < T < \dfrac{\pi}{b}$ folgt, dass $\hat{f}$ nur auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ von Null verschieden ist und auf ganz $\mathbb{R}$ integrierbar ist.

Mit

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; e^{-iux}\; dx$$

gilt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)\; e^{iux}\; du$$

Wir betrachten jetzt die zwei zunächst auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ definierten Funktionen $F(u) = \hat{f}(u)$ und $G_x(u) = e^{-ixu}$ und setzen sie dann $\dfrac{2\pi}{T}$ – periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

Die FOURIER-Entwicklung dieser Funktionen liefert die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{\sqrt{T}}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}(u)\; e^{i\pi uk\frac{T}{\pi}}\; du = \frac{\sqrt{T}}{2\pi} f(kT) \\
G_{x,k} &= \frac{\sqrt{T}}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-iux} e^{iukT}\; du = \frac{\sqrt{T}}{2\pi}\frac{1}{-i(x-kT)} e^{-i(x-kT)u}\Big|_{-\pi/T}^{\pi/T} \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{1}{\frac{\pi}{T}(x-kT)}\;\sin\left(\frac{\pi}{T}(x-kT)\right) = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(x-kT)\right)
\end{aligned}$$

Damit folgt jetzt für die Funktion f die Darstellung

$$f(x) = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}(u)\; e^{iux}\, dx = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(u)\overline{G_x(u)}\, du$$

Unter Verwendung der PARSEVAL-Gleichung (siehe Mathematik B) folgt daraus schließlich

$$f(x) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\, \overline{G_{x,k}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(x-kT)\right)$$

□

2.6.1. Anwendung auf Probleme bei partiellen Differentialgleichungen

Man bestimme die Lösung des DIRICHLET'schen Randwertproblems bei der Potentialgleichung für die Halbebene $y > 0$.

$$\begin{aligned} \triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad & -\infty < x < \infty, y > 0, \\ u(x,0) = f(x) \qquad & -\infty < x < \infty, \\ u \text{ beschränkt für } y \to \infty, \qquad & u, u_x \to 0 \text{ für } |x| \to \infty. \end{aligned}$$

FOURIER-Transformation von $u(x,y)$ bzgl. x:

$$\mathcal{F}[u(x,y)] = U(\xi,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,y)e^{-i\xi t}\,dt$$

$$\mathcal{F}[u_x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,y)e^{-i\xi t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(u(t,y)e^{-i\xi t}\big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi\int_{-\infty}^{\infty} u(t,y)e^{-i\xi t}\,dt\right) = (i\xi)\mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = (i\xi)^2\mathcal{F}[u] = -\xi^2 U(\xi,y)\,, \quad \mathcal{F}[u_{yy}] = U_{yy}.$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$U_{yy} - \xi^2 U = 0$$

mit der Lösung

$$U(\xi,y) = A(\xi)e^{\xi y} + B(\xi)e^{-\xi y}.$$

Da u für $y \to \infty$ beschränkt ist, muss auch U beschränkt bleiben für $y \to \infty$.

1. $\xi > 0$: $A(\xi) \overset{!}{=} 0$, d.h.
$$U(\xi,y) = B(\xi)e^{-\xi y}.$$

2. $\xi < 0$: $B(\xi) \overset{!}{=} 0$, d.h.
$$U(\xi,y) = A(\xi)e^{\xi y}.$$

Somit gilt $U(\xi,0) = B(\xi)$ für $\xi > 0$ und $U(\xi,0) = A(\xi)$ für $\xi < 0$, also

$$U(\xi,y) = U(\xi,0)e^{-|\xi|y}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Mit

$$U(\xi,0) = \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[f(x)]$$

folgt

$$U(\xi,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}e^{-|\xi|y}\,dt.$$

Die inverse Transformation liefert schließlich

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi[i(x-t)]-|\xi|y}\,d\xi\right)\,dt \\ &= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt. \end{aligned}$$

2.7. LAPLACE-Transformation

Definition 2.19. Für eine geeignete Funktion $f(t)$ ist die LAPLACE-**Transformierte** $F(s)$ definiert als

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, s > 0$$

Dabei wird s als **Transformationsvariable** bezeichnet.

Definition 2.20. Eine Funktion $f(t)$ ist von **exponentieller Ordnung** für $t \to \infty$, falls eine Konstante $a > 0$ existiert, sodass

$$e^{-at}f(t)$$

beschränkt ist für alle $t > T$, d.h.

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{at}, M > 0.$$

Schreibweise: $f(t) = \mathcal{O}(e^{at})$ für $t \to \infty$

Beispiel 2.25. Die Funktionen t^k, $\sin bt$, $t^k e^{at}\cos bt$, $t^k e^{at}\sin bt$ mit k, a, $b \in \mathbb{R}$ sind von exponentieller Ordnung.

Satz 2.15. Sei f stückweise stetig in $[0, T]$ für $T > 0$ und sei f von exponentieller Ordnung, d.h.

$$f(t) = \mathcal{O}(e^{at}) \text{ für } t \to \infty.$$

Dann existiert die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ für $s > a$, sie ist eine analytische Funktion.

Voraussetzung. Das uneigentliche Integral existiert, also etwa $|f(t)| \leq M\, e^{at}$ mit Konstanten M und a.

Satz 2.16 (LAPLACE-Umkehrformel). Sei f auf $[0, \infty)$ definiert und höchstens von exponentiellem Wachstum, d.h. $|f(t)| \leq Me^{at}$, und $c > a$. Dann gilt für $t \geq 0$ die LAPLACE-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

Begründung. Man setzt f auf ganz $\mathbb{R}$ fort durch die Festsetzung $f(t) \equiv 0$ für $t < 0$ und berechnet dann $F(s)$ für $s = c + iy, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(c+iy)t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left(e^{-ct}f(t)\right)\, e^{-iyt}\,dt = 2\pi\widehat{e^{-cy}f(y)} \end{aligned}$$

wobei $\widehat{\ }$ die FOURIER-Transformierte bezeichnet.

Dann berechnet man das Umkehrintegral entlang der Geraden $\mathrm{Re}(s) = c$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\widehat{e^{-cy}f(y)}e^{(c+iy)t}\,i\,dy = e^{ct}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{e^{-cy}f(y)}e^{iyt}\,dy}_{=e^{-ct}f(t)} = f(t)$$

nach der FOURIER'schen Umkehrformel.

Bemerkung. Damit ist die LAPLACE-Transformation eine umkehrbar eindeutige Transformation.

Beispiel 2.26. $f(t) = c$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty ce^{-st}dt = c \cdot \frac{-1}{s} \cdot e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{c}{s}(0-1) = \frac{c}{s}.$$

Beispiel 2.27. $f(t) = t$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = \underbrace{-\frac{t}{s} \cdot e^{-st}\Big|_0^\infty}_{0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}.$$

Beispiel 2.28. $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$.

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st}dt \overset{st=\xi}{=} \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^\alpha d\xi = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha-1}}.$$

Speziell für $\alpha = n, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Beispiel 2.29. $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Beispiel 2.30. $f(t) = \sin\omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) &= \int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dt = \left|\begin{array}{ccccc} \sin\omega t & = & u, u' & = & \omega\cos\omega t \\ e^{-st} & = & v', v & = & -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}\right| \\
&= -\frac{\sin\omega t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \cos\omega t\, e^{-st}dt \\
&= \left|\begin{array}{ccccc} \cos\omega t & = & u, u' & = & -\omega\sin\omega t \\ e^{-st} & = & v', v & = & -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}\right| \\
&= \frac{\omega}{s}\left(-\frac{1}{s}\cos\omega t\, e^{-st}\Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \sin\omega t\, e^{-st}dt\right) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}F(s),
\end{aligned}$$

somit

$$\Longrightarrow \quad F(s) = \mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Beispiel 2.31. $f(t) = \cos\omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{\omega}\mathcal{L}\{\sin\omega t\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

BEWEIS.

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^\infty \underbrace{|f(t)|}_{\le Me^{at}} e^{-st}dt \le M\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \frac{M}{s-a} \quad \text{für} \quad s > a$$

Satz 2.17 (Eigenschaften der LAPLACE-Transformation).

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} = \lambda\mathcal{L}\{f(t)\} + \mu\mathcal{L}\{g(t)\}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \qquad c > 0 \tag{2.3}$$

Mit der HEAVISIDE-Funktion

$$H(t-b) := \begin{cases} 1 & t \geq b \\ 0 & t < b \end{cases}$$

gilt

$$\mathcal{L}\{H(t-b)f(t-b)\} = e^{-bs}F(s), b \geq 0. \tag{2.4}$$

BEWEIS. **Zu** (2.1) Die Integration ist linear.

Zu (2.2)

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a).$$

Zu (2.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(ct)\} &= \int_0^\infty f(ct)e^{-st}dt \quad \left|\text{Subst.: } \xi = ct \quad dt = \frac{1}{c}d\xi\right| \quad = \frac{1}{c}\int_0^\infty f(\xi)e^{-\frac{s}{c}\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right).\end{aligned}$$

Zu (2.4)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{H(t-b)\cdot f(t-b)\} &= \int_0^\infty H(t-b)f(t-b)e^{-st}dt = \int_b^\infty 1\cdot f(t-b)e^{-st}dt \\ &= \left|\text{Subst.: } t-b=\xi \quad dt = d\xi\right| = \int_{\xi=0}^\infty f(\xi)e^{-s(\xi+b)}d\xi \\ &= e^{-sb}\int_0^\infty f(\xi)e^{-s\xi}d\xi = e^{-sb}F(s). \qquad \square\end{aligned}$$

Beispiel 2.32.

$$\mathcal{L}\{e^{-t}t^2\} \overset{(2.2)}{=} \frac{2}{(s+1)^3} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}.$$

Beispiel 2.33.

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\sin\omega t\} \overset{(2.2)}{=} \frac{\omega}{(s+1)^2+\omega^2} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Beispiel 2.34.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)\right\} \overset{(2.1)}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^t\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{s^2-1}.\end{aligned}$$

Satz 2.18 (Differentiation). f sei stetig, f' stückweise stetig in $[0,T], T>0, f(t)=\mathcal{O}(e^{at})$ für $t\to\infty$. Dann gilt

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0).$$

Beweis.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=-\frac{1}{s}f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s}f(0)+\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f'(t)\}$$
$$\begin{matrix}f(t)=u, u'=f'(t)\\ e^{-st}=v', v=-\frac{1}{s}e^{-st}.\end{matrix}$$

□

Bemerkung.

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\cdot f'(t)\right\}=s\cdot\mathcal{L}\{f'(t)\}-f'(0)=s\cdot(s\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0))-f'(0)$$
$$=s^2\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}-s\cdot f(0)-f'(0).$$

Folgerung.

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\}=s^n\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{n-1}(0).$$

Satz 2.19 (Integration). Ist $F(s)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$, so gilt

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{F(s)}{s}.$$

Beweis. $f(t)=\mathcal{O}(e^{at})$.

$$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right|\le\int_0^t\underbrace{|f(\tau)|}_{\le Me^{at}}d\tau\le M\int_0^t e^{a\tau}d\tau\le\tilde{M}e^{at},$$

also existiert die Laplace-Transformierte von $\int_0^t f(\tau)d\tau$. Damit gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=s\cdot\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}-\underbrace{\int_0^0 f(\tau)d\tau}_{=0}.$$

Beispiel 2.35. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$y''-3y'+2y=e^{3t},\qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

Sei $\varphi(t)$ eine Lösung des Problems mit $\mathcal{L}\{\varphi(t)\}=\Phi(s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\varphi''\}&=s^2\Phi(s)-s\varphi(0)-\varphi'(0)=s^2\Phi(s),\\ \mathcal{L}\{\varphi'\}&=s\Phi(s)-\varphi(0)=s\Phi(s),\\ \mathcal{L}\{e^{3t}\}&=\frac{1}{s-3}.\end{aligned}$$

Damit folgt aus der Differentialgleichung

$$s^2\Phi(s) - 3s\Phi(s) + 2\Phi(s) = \frac{1}{s-3},$$

daraus wiederum

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)(s-3)}$$

und somit

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} \overset{\text{PBZ}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3}\right\} = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Damit haben wir folgende Schritte zur Lösung des AWP gemacht:

AWP	$\overset{\mathcal{L}}{\to}$	Algebr. Problem
		$\downarrow$
$\varphi(t)$	$\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\leftarrow}$	Lösung Φ

Beispiel 2.36. Man bestimme die allgemeine Lösung von $y'' + 4y = 0$. Setze $y(0) = A$, $y'(0) = B$ für $A, B \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathcal{L}\{\varphi'' + 4\varphi\} = s^2\Phi(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0) + 4\Phi(s) = s^2\Phi(s) - sA - B + 4\Phi(s) = 0.$$

Daraus folgt

$$\Phi(s) = \frac{As + B}{s^2 + 4}, \qquad \varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As}{s^2+4} + \frac{B}{s^2+4}\right\}.$$

Es gilt

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As}{s^2+4}\right\} = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} = A\cos 2t,$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s^2+4}\right\} = \frac{B}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \frac{B}{2}\sin 2t,$$

somit

$$\varphi(t) = A\cos 2t + \tilde{B}\sin 2t, \qquad A, \tilde{B} \in \mathbb{R}.$$

Definition 2.21. Die Funktion

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi$$

heißt (endliche) **Faltung** der Funktionen f und g.

Es gelten folgende *Rechengesetze* für die Faltung:

1. $f * g = g * f$.
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$.
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Beispiel 2.37. $f(t) = t$, $g(t) = t$.

$$(f * g)(t) = \int_0^t (t-\xi)\xi \, d\xi = \int_0^t (t\xi - \xi^2) d\xi = \left(\frac{t}{2}\xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_0^t = \frac{t^3}{6}$$
$$\neq f(t) \cdot g(t) = (f \cdot g)(t).$$

Satz 2.20 (Faltungssatz). Es gilt

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} = F \cdot G \quad \text{mit} \quad F = \mathcal{L}\{f\}, G = \mathcal{L}\{g\},$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F \cdot G\} = f * g.$$

Beweis.

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \left(\int_0^t f(t-\xi) g(\xi) d\xi \right) dt = \int_{t=0}^\infty \int_{\xi=0}^t e^{-st} f(t-\xi) g(\xi) \, d\xi \, dt =$$
$$= \int_{\xi=0}^\infty \int_{t=\xi}^\infty e^{-st} f(t-\xi) g(\xi) \, dt \, d\xi = \int_{\xi=0}^\infty g(\xi) \left(\int_{t=\xi}^\infty e^{-st} f(t-\xi) dt \right) d\xi =$$
$$\begin{aligned} \text{Subst: } t - \xi &= \eta \\ dt &= d\eta \end{aligned}$$
$$= \int_{\xi=0}^\infty g(\xi) \left(\int_{\eta=0}^\infty e^{-s(\eta+\xi)} f(\eta) d\eta \right) d\xi = \int_{\xi=0}^\infty g(\xi) e^{-s\xi} d\xi \cdot \int_{\eta=0}^\infty f(\eta) e^{-s\eta} d\eta$$
$$= G(s) \cdot F(s)$$ □

Beispiel 2.38. Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'' - 3y' + 2y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

mit

$$f(t) = \mathcal{O}(e^{at}) \text{ für } t \to \infty.$$

Die Laplace-Transformation der gesamten Gleichung liefert

$$\mathcal{L}\{\varphi'' - 3\varphi' + 2\varphi\} = \mathcal{L}\{f\},$$
$$s^2\Phi - 3s\Phi + 2\Phi = F(s),$$

somit

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2}$$

und

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ F(s) \cdot \frac{1}{(s-1)(s-2)} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\}.$$

Bekannt ist $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f$. Daraus folgt

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-1)(s-2)} \right\} \overset{\text{PBZ}}{=} e^{2t} - e^t = g(t),$$

d.h.

$$\varphi(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\xi) g(t-\xi) d\xi = \int_0^t f(\xi)(e^{2(t-\xi)} - e^{t-\xi}) d\xi.$$

Definition 2.22. Zunächst definiert man für $\varepsilon > 0$, $h \gg 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, die Funktion

$$p(t) = \begin{cases} h & \text{für } |t-a| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |t-a| > \varepsilon. \end{cases}$$

Ihre LAPLACE-Transformierte lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{p(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} p(t)dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-st} h dt = -\frac{h}{s} e^{-st}\Big|_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \\ &= -\frac{h}{s}\left(e^{-s(a+\varepsilon)} - e^{-s(a-\varepsilon)}\right) = -\frac{h}{s} e^{-as} \underbrace{(e^{-s\varepsilon} - e^{s\varepsilon})}_{-2\sinh s\varepsilon} \\ &= \frac{2h}{s} \sinh s\varepsilon e^{-as}. \end{aligned}$$

Jetzt wählt man speziell $h = \frac{1}{2\varepsilon}$ und erhält für die Funktion

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{für } |t-a| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |t-a| > \varepsilon. \end{cases}$$

die Relation

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^\infty p_\varepsilon(t)dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1.$$

Für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich daraus die sogenannte DIRAC*'sche δ-Funktion* $\delta(t-a)$ mit den Eigenschaften

$$\delta(t-a) = 0 \quad \text{für} \quad t \neq a \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^\infty \delta(t-a)dt = 1.$$

Ihre LAPLACE-Transformierte lautet

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{L}\{p_\varepsilon(t)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon s} e^{-as} \sinh \varepsilon s = e^{-as}.$$

Speziell für $a = 0$ erhält man $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Beispiel 2.39. Betrachte

$$y'' + 2y' + 5y = \delta(t-1), \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Sei $\varphi(t)$ Lösung. Dann erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varphi(t)\} &= \Phi(s) \\ \mathcal{L}\{\varphi'(t)\} &= s\Phi(s) - \varphi(0) \\ \mathcal{L}\{\varphi''(t)\} &= s^2\Phi(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$s^2\Phi(s) + 2s\Phi(s) + 5\Phi(s) = e^{-s},$$

woraus

$$\Phi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2e^{-s}}{2((s+1)^2 + 4)}$$

folgt. Wegen

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \sin\omega t\ , \quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

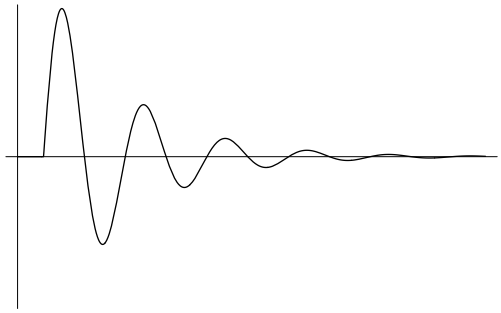
und

$$\mathcal{L}\{H(t-b)f(t-b)\} = e^{-bs}F(s)$$

folgt nun

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}H(t-1)e^{-(t-1)}\sin 2(t-1).$$

Diese Differentialgleichung beschreibt z.B. die Schwingung eines gedämpften Pendels, das für $0 \le t < 1$ in Ruhe ist, zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ einen „Schlag“ bekommt und dann wieder ohne äußere Einwirkung gedämft weiterschwingt.



Produkt einer beliebigen stetigen Funktion f mit der δ-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} p_\varepsilon(t)f(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}f(t)dt$$
$$\overset{\text{MWS}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}2\varepsilon f(t^*) = f(a).$$

2.7.1. Anwendung auf Probleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Mit Hilfe des Ableitungssatzes wird die DGL in eine algebraische Gleichung übergeführt, die in der Regel leichter zu lösen ist.

Beispiel 2.40. Gegeben sei das folgende AWP[1]:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0 \\ \dot{y}(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

Zur Suche der Funktion $y(t)$ geht man dabei nach folgendem Schema vor:

1. **Anwendung der Laplace-Transformation:**

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] - 2\mathcal{L}[\dot{y}] + 5\mathcal{L}[y] = 0$$

$$\left(s^2F(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right) - 2\left(sF(s) - y(0)\right) + 5F(s) = 0$$

Nun berücksichtigt man noch die Anfangsbedingungen und erhält

$$(s^2 - 2s + 5)F(s) = s + 1 - 2$$

[1] Dieses AWP kann auch mit dem Exponentialansatz gelöst werden.

2. **Lösen der algebraischen Gleichung in F:**

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+5}$$

3. **Rücktransformation:**

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F]$$

Dazu zerlegt man den Lösungsterm in seine Partialbruchzerlegung (PBZ). Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind

$$s^2 - 2s + 5 = 0 \Rightarrow s = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2$$

Der allgemeine Ansatz bei der PBZ lautet daher

$$\frac{s-1}{s^2-2s+5} = \frac{A}{s-(1+2i)} + \frac{B}{s-(1-2i)}$$

Die Faktoren A und B können nach der Polmethode bestimmt werden[2], man erhält

$$A = B = \frac{1}{2}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s-(1+2i)} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-(1-2i)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\underbrace{(1+2i)}_{a}}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\underbrace{(1-2i)}_{a'}}\right] \end{aligned}$$

Aus der Tabelle entnimmt man

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \Rightarrow y(t) = e^{at}$$

und erhält so

$$y(t) = \frac{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}}{2}$$

Dieser Term wird mit Hilfe der EULER'schen Formel reell gemacht, die Lösung ist

$$y(t) = e^t \cos 2t.$$

Wiederholung: Partialbruchzerlegung Sei eine beliebige rationale Funktion $\frac{P(z)}{Q(z)}$ gegeben, wobei der Grad des Nenners größer als der Grad des Zählers sei. Sei ferner

$$Q(z) = (z-\sigma_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z-\sigma_m)^{k_m}.$$

Dann ist

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z-\sigma_i)^j}.$$

[2]Man setzt dazu $s = 1+2i$ bzw. $s = 1-2i$, sodass jeweils einer der Faktoren herausfällt.

Beispiel 2.41. Gegeben sei die DGL

$$y''' - y'' + y' - y = e^x$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Sei ferner $Y = \mathcal{L}[y]$. Die LAPLACE-Transformation ergibt

$$Ys^3 - Ys^2 + Ys - Y = \frac{1}{s-1}$$

$$Y \cdot (s^3 - s^2 + s - 1) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s-1)(s+i)(s-i) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y = \frac{1}{(s-1)^2(s+i)(s-i)}$$

Der Ansatz für die PBZ ist

$$\frac{1}{(s-1)^2(s+i)(s-i)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-i} + \frac{D}{s+i}$$

$$1 = A(s-1)(s-i)(s+i) + B(s-i)(s+i) + C(s-1)^2(s+i) + D(s-1)^2(s-i)$$

Nun führt man einen Koeffizientenvergleich durch:

$$\begin{aligned}
s^3 &: A + 0 \cdot B + C + D = 0 \\
s^2 &: -A + B + (-2+i)C + (-2-i)D = 0 \\
s &: A + 0 \cdot B + (1-2i)C + (1+2i)D = 0 \\
1 &: -A + B + iC + (-i)D = 1
\end{aligned}$$

Damit erhält man sofort $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$ (aus den Gleichungen 1 und 4). Durch Subtraktion der ersten und der dritten Gleichung erhält man

$$2iC - 2iD = 0 \Rightarrow C = D$$

und aus der Subtraktion von zweiter und vierter Gleichung

$$-2C - 2D = -1 \Rightarrow C = D = \frac{1}{4}$$

Damit wird

$$Y = \frac{1}{(s-1)^2(s-i)(s+i)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s-i)} + \frac{1}{4(s+i)}$$

Bis auf den zweiten Summenterm lassen sich alle sehr einfach berechnen, der zweite Summand kann über den Faltungssatz ermittelt werden:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-1}\right] = \int_0^x e^t e^{x-t}\, dt = \int_0^x e^x\, dt = e^x \int_0^x dt = xe^x$$

Damit wird

$$y = \underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]}_{-\frac{1}{2}e^x} + \underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]}_{xe^x} + \underbrace{\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-i}\right]}_{\frac{1}{4}e^{ix}} + \underbrace{\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+i}\right]}_{\frac{1}{4}e^{-ix}}$$

Zum Abschluss vereinigt man die letzten beiden Summanden wieder über den EULER'schen Satz und erhält das Ergebnis

$$y = \frac{1}{2}(x-1)e^x + \frac{1}{2}\cos x.$$

2.7.2. Anwendung auf Probleme bei partiellen Differentialgleichungen

Halbunendliche Saite mit äußerer Kraft $f(t)$, ein Ende fixiert, das andere frei.
Differentialgleichung:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x), \qquad 0 < x < \infty, t > 0,$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

Randwerte:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u_x(x,t) &\to 0 \quad \text{für } x \to \infty. \end{aligned}$$

Transformation von $u(x,t)$ bzgl. der Variablen t:

$$U(x,s) = \mathcal{L}[u(x,t)].$$

Ferner gelte

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

Dann folgt mit

$$\mathcal{L}[u_{tt}] = s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) = s^2 U(x,s)$$

und

$$\mathcal{L}[c^2 u_{xx} + f(t)] = c^2 U_{xx} + F(s).$$

für $U(x,s)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$U_{xx} - \frac{s^2}{c^2}U = -\frac{1}{c^2}F(s)$$

mit der Lösung

$$U(x,s) = Ae^{\frac{sx}{c}} + Be^{-\frac{sx}{c}} + \frac{F(s)}{s^2}.$$

Transformation der Randwerte:

$$\begin{aligned} U(0,s) &= \int_0^\infty u(0,t)e^{-st}\ dt = 0, \\ U_x(x,s) &= \int_0^\infty u_x(x,t)e^{-st}\ dt \\ \lim_{x\to\infty} U_x(x,s) &= \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} u_x(x,t)e^{-st}\ dt = 0. \end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Lösung ergibt sich damit

$$\begin{aligned} U(0,s) &= A + B + \frac{F(s)}{s^2} = 0 \\ \lim_{x\to\infty} U_x(x,s) &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{s}{c}\left(Ae^{\frac{sx}{c}} - Be^{-\frac{sx}{c}}\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

somit $A = 0$ und $B = -\frac{F(s)}{s^2}$, also

$$U(x,s) = \frac{F(s)}{s^2}\left(1 - e^{-\frac{sx}{c}}\right).$$

Berechne nun die Lösung im Bildraum:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\cdot\frac{1}{s^2}\right] &= f(t) * t = \int_0^t f(\xi)(t-\xi)\ d\xi \\ \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\cdot\frac{1}{s^2}\cdot e^{-\frac{x}{c}s}\right] &= \int_0^{t-\frac{x}{c}} f(\xi)(t-\frac{x}{c}-\xi)\ d\xi \cdot H\left(t-\frac{x}{c}\right) \\ &= \begin{cases} \int_0^{t-\frac{x}{c}} f(\xi)(t-\frac{x}{c}-\xi)\ d\xi & \text{für } t > \frac{x}{c} \\ 0 & \text{für } t < \frac{x}{c} \end{cases}, \end{aligned}$$

also

$$u(x,t) = \begin{cases} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)\ d\xi - \int_0^{t-\frac{x}{c}} f(\xi)(t-\frac{x}{c}-\xi)\ d\xi & \text{für } t > \frac{x}{c} \\ \int_0^t f(\xi)(t-\xi)\ d\xi & \text{für } t < \frac{x}{c} \end{cases}.$$

3. Vektoranalysis im Raum

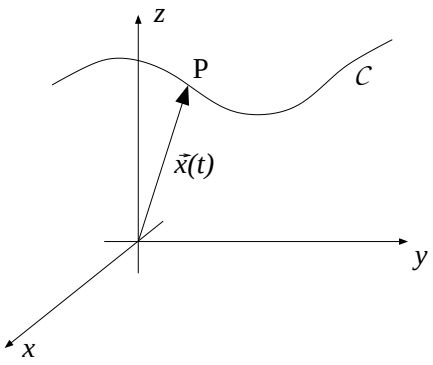
Zunächst werden einige bereits behandelte Begriffe wieder in Erinnerung gebracht.

3.1. Vektorielle Darstellung einer Kurve im Raum

Eine Kurve $\mathcal{C}$ im Raum wird beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I$$

Dabei sind $x(t), y(t), z(t)$ stetige Funktionen. Durchläuft die Variable (= der Parameter) t das Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so bewegt sich der Punkt P entlang der Kurve $\mathcal{C}$.



Beispiel 3.1. Ein Elektron bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

entlang einer Schraubenlinie mit dem Radius R. Die Koordinaten des Elektrons zu einem Zeitpunkt t sind

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\omega t) \\ y(t) &= R\sin(\omega t) \\ x(t) &= h\,t \end{aligned}$$

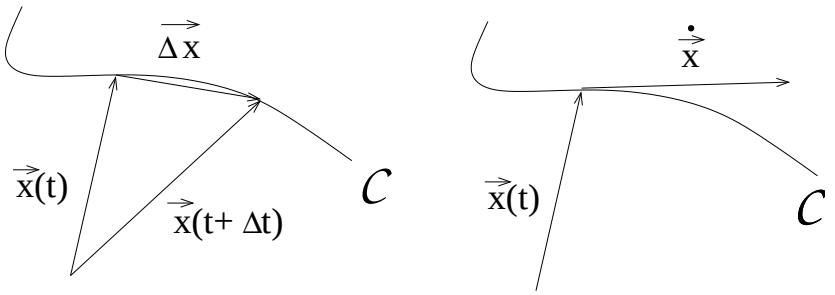
Dabei ist $\omega = \frac{e}{m}B_0$ und h die konstante Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung.

3.2. Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

Ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ die Parameterdarstellung einer Kurve $\mathcal{C}$, so ist die **Ableitung des Vektors** $\vec{x}$ definiert als Grenzwert

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t) \right)$$

für $\Delta t \to 0$. Geometrisch entspricht dies dem Grenzübergang des Differenzvektors (= Sekantenvektors) in den Tangentenvektor im Punkt $\vec{x}(t)$. Man erhält



$$\frac{1}{\Delta t} \left(\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t) \right) = \begin{pmatrix} (x(t + \Delta t) - x(t))/\Delta t \\ (y(t + \Delta t) - y(t))/\Delta t \\ (z(t + \Delta t) - z(t))/\Delta t \end{pmatrix} \overset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} =: \dot{\vec{x}}(t).$$

D.h. die Differentiation eines Vektors $\vec{x}(t)$ nach dem Parameter t erfolgt komponentenweise.

Anwendung Ist $\vec{x}(t)$ der zeitabhängige Ortsvektor der Bahnkurve eines Massenpunktes, dann ist

$$\begin{array}{rcll} \vec{v}(t) & = & \dot{\vec{x}}(t) & \text{der Geschwindigkeitsvektor} \\ \vec{a}(t) & = & \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) & \text{der Beschleunigungsvektor} \end{array}$$

Beispiel 3.2. Elektron im Magnetfeld (siehe Bsp. 3.1)

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

3.3. Vektor- oder Kraftfelder

Definition 3.1.

1. Eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(x, y, z)$ heißt **skalares Feld** oder **Skalarfeld**.

   Beispiele für Skalarfelder sind räumliche Temperaturprofile $T(x, y, z)$ oder Ladungsdichten $\varrho(x, y, z)$.

2. Als **Vektorfeld** oder **Kraftfeld** bezeichnet man eine vektorwertige Funktion $\vec{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}.$$
   $\vec{K}$ weist jedem Punkt des Raumes einen Vektor zu.

   Beispiele für Vektorfelder sind das Magentfeld $\vec{B}$, das elektrische Feld $\vec{E}$, Kraftfelder oder Geschwindigkeitsfelder $\vec{v}$.

Beispiel 3.3. Die elektrische Kraft, welche eine Punktladung q_1 auf eine andere Punktladung q_2 ausübt, ist nach dem Coulomb'schen Gesetz gegeben durch
$$\vec{K} = -\frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3.4. Gradient, Divergenz, Rotation

Definition 3.2.

1. Sei $\Phi(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann heißt der Ausdruck
$$\operatorname{grad} \Phi \equiv \bigtriangledown \Phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix}$$
   der **Gradient von** Φ.

2. Der Operator
$$\nabla := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$
   heißt **Nabla-Operator**.

Der Nabla-Operator ist ein Vektor, der immer links von der zu differenzierenden Funktion steht. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{grad}\Phi &= \nabla\Phi, \\ \text{div}\vec{K} &= \nabla\vec{K}, \\ \text{rot}\vec{K} &= \nabla \times \vec{K}. \end{aligned}$$

Definition 3.3.
Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld, dann heißt

$$\text{div}\,\vec{K} \equiv \bigtriangledown \cdot \vec{K} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergenz von $\vec{K}$.

Bemerkung. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist immer eine skalare Funktion.

Bemerkung. Ein Vektorfeld heißt **quellenfrei** (d.h. es existieren keine Quellen bzw. Senken), falls die Divergenz verschwindet.

- $\text{div}\,\vec{K} > 0$ ... es existieren Quellen (Ausgangspunkt von Feldlinien)
- $\text{div}\,\vec{K} < 0$ ... es existieren Senken (Feldlinien verschwinden)

Definition 3.4. Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, dann heißt

$$\text{rot}\,\vec{K} := \bigtriangledown \times \vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$$

Rotation von $\vec{K}$.

Ein Vektorfeld $\vec{K}$ dessen Rotation gleich dem Nullvektor $\vec{O}$ ist, heißt **wirbelfrei**.

Zusammenfassung:

- $\text{grad}\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \Phi_x(x,y,z) \\ \Phi_y(x,y,z) \\ \Phi_z(x,y,z) \end{pmatrix}$ heisst **Gradient** von $\Phi(x,y,z)$.
  Der Gradient ist ein Vektorfeld.
- $\text{div}\vec{K} = P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z)$ ist die **Divergenz** eines Vektorfeldes $\vec{K}$.
  Die Divergenz ist ein skalares Feld.
- $\text{rot}\vec{K} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$ ist die **Rotation** des Vektorfeldes $\vec{K}$.
  Die Rotation ist ein Vektorfeld.

3.5. Rechnen mit Differentialoperatoren

Es sollen einige wichtige Begriffe für skalare Felder und für Vektorfelder zusammengestellt werden.

Definition 3.5. Ein Vektorfeld $\vec{K}$ heißt **Potentialfeld** oder **Gradientenfeld** wenn es eine Funktion Φ gibt mit $\vec{K} = \text{grad}\Phi$. Φ heißt dann das **skalare Potential**.

Direkt prüft man nach, dass stets gilt:

$$\nabla(\nabla \times \vec{K}) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times (\nabla\Phi) = \vec{0}$$

d.h.

$$\text{div}(\text{rot}\vec{K}) = 0,$$
$$\text{rot}(\text{grad}\Phi) = \vec{0}.$$

Konsequenzen aus der Quellenfreiheit ($\text{div}\vec{K} = 0$) und aus der Wirbelfreiheit ($\text{rot}\vec{K} = \vec{0}$) eines Vektorfeldes:

Satz 3.1.

1. Das Vektorfeld $\vec{K}$ ist genau dann wirbelfrei, wenn es ein skalares Feld Φ gibt mit $\vec{K} = \text{grad}\Phi$. Man nennt Φ dann **skalares Potential**.

$$\text{Es gibt ein } \Phi \text{ mit } \vec{K} = \text{grad}\Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rot}\vec{K} = \vec{0}$$

2. Das Vektorfeld $\vec{K}$ ist genau dann quellenfrei, wenn es ein Vektorfeld $\vec{A}$ gibt mit $\vec{K} = \text{rot}\vec{A}$. Man nennt $\vec{A}$ dann ein **Vektorpotential**.

$$\text{Es gibt ein } \vec{A} \text{ mit } \vec{K} = \text{rot}\vec{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{div}\vec{K} = 0$$

Beispiel 3.4. Gegeben ist das skalare Potential

$$\Phi(x,y,z) = \arctan\frac{x}{y}, \quad x \geq 0$$

Das dazugehörige Vektorfeld $\vec{K}$ lautet:

$$\vec{K} = \text{grad}\Phi = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\vec{K}$ ein Potentialfeld ist, gilt $\text{rot}\vec{K} = \vec{0}$.
Die Divergenz von $\vec{K}$ ist $\text{div}\vec{K} = 0$. D.h. das Vektorfeld ist sowohl wirbel- als auch quellenfrei. Weiters gilt

$$\text{div}\vec{K} = \text{div grad}\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$$

Man nennt Δ mit

$$\Delta\Phi := \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}$$

den LAPLACE-**Operator**. Er spielt in der Elektrostatik eine große Rolle, da alle elektrostatischen Probleme durch die Differentialgleichung (POISSON-Gleichung)

$$\Delta\Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

modelliert werden.

Beispiel 3.5. Das Kraftfeld

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ x^2yz^2 \end{pmatrix}$$

besitzt wegen

$$\text{rot}\vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial xz \\ xy & xz & x^2yz^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x^2z^2 - x \\ -2xyz^2 \\ z - x \end{pmatrix}$$

keine Potentialfunktion.

Beispiel 3.6. Das Kraftfeld

$$\vec{K}(\vec{x}) = c\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{c}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ist ein zentrales Kraftfeld (vgl. Definition 4.3 und Beispiele (4.6) und (4.7)). Man rechnet nach, dass

$$\text{rot}\vec{K} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \text{div}\vec{K} = 0$$

d.h. $\vec{K}$ ist ein Gradientenfeld.
Das zugehörige Potential ist

$$\Phi(x,y,z) = -\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \text{const.}$$

Es gilt weiters

$$\mathrm{div}\vec{K} = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi) = \Delta\,\Phi = 0$$

d.h. die Funktion Φ ist eine Lösung der LAPLACE-Gleichung.

Beispiel 3.7. Gegeben ist eine zähe Flüssigkeit, die durch ein Rohr mit dem Radius R in y-Richtung fließt.

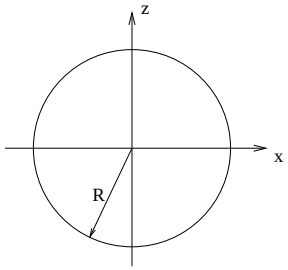


Abbildung 3.1.: Rohrquerschnitt

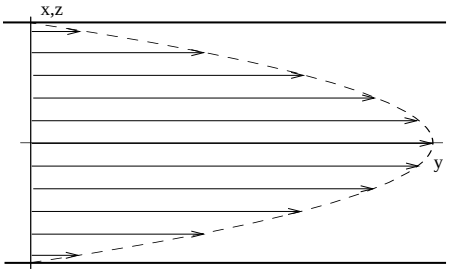


Abbildung 3.2.: Geschwindigkeitsfeld

Der Geschwindigkeitvektor ist nach dem Gesetz von HAGEN-POISEUILLE

$$\vec{v} = c\begin{pmatrix} 0 \\ R^2 - x^2 - z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0\,, \qquad \mathrm{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} 2cz \\ 0 \\ -2cx \end{pmatrix}$$

D.h. das Geschwindigkeitsfeld hat keine Quellen ($\mathrm{div}\vec{v} = 0$), besitzt aber eine Zirkulation in der xz-Ebene.

4. Kurvenintegrale im Raum

4.1. Definition

Bewegt man einen Körper in einem Kraftfeld

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

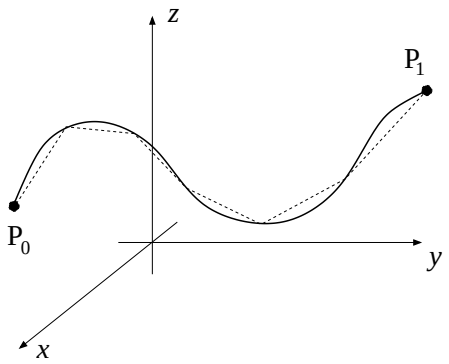
so ist die dabei verrichtete Arbeit gleich dem Produkt *Kraft* · *Weg*.

Wir betrachten eine (orientierte) Raumkurve

$$\mathcal{C}: \quad \vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \tau_0 \le t \le \tau_1 \,,$$

mit dem Anfangspunkt $P_0 \equiv \vec{P}_0 := \vec{x}(\tau_0)$ und dem Endpunkt $P_1 \equiv \vec{P}_1 := \vec{x}(\tau_1)$.
Nun approximiert man die Kurve $\mathcal{C}$ durch einen Polygonzug von N Strecken, d.h. man unterteilt das Intervall $[\tau_0, \tau_1]$ in N Teilintervalle:

$$\tau_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \tau_1$$



Die entlang der Strecke von $\vec{x}_i$ nach $\vec{x}_{i+1}$ mit $\vec{x}_i := \vec{x}(t_i)$ verrichtete Arbeit ist nun gleich

$$W_i = \vec{K}(\vec{x}_i) \cdot \Delta\vec{x}_i \quad \text{mit} \quad \Delta\vec{x}_i = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i \,.$$

Die von P_0 nach P_1 verrichtete Arbeit wird dann approximiert durch

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} \left(\vec{K}(\vec{x}_i) \cdot \Delta\vec{x}_i \right) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(P(\vec{x}(t_i))\Delta x_i + Q(\vec{x}(t_i))\Delta y_i + R(\vec{x}(t_i))\Delta z_i \right)$$

Mit $\dot{x}(t_i) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}, \dot{y}(t_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}, \dot{z}(t_i) \approx \frac{\Delta z_i}{\Delta t_i}\,, \Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ folgt

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} \left(P(\vec{x}(t_i))\dot{x}(t_i) + Q(\vec{x}(t_i))\dot{y}(t_i) + R(\vec{x}(t_i))\dot{z}(t_i)\right) \Delta t_i$$

Geht man bei dieser RIEMANN'schen Summe mit der Feinheit der Zerlegung gegen Null ($\Delta t_i \to 0$ für alle i), so erhält man das Integral

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0}^{t_1} \left(P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)\right)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\right)\, dt =: \int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz \end{aligned}$$

Definition 4.1. Das Integral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt = \int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz \equiv \int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$$

wird als **Kurvenintegral** bzw. **Linienintegral** des Vektorfeldes $\vec{K}$ entlang der Kurve $\mathcal{C}$ bezeichnet.

Bemerkung.

a) Der Wert des Integrals hängt i.A. nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab, sondern auch vom vorgegebenen Weg.

b) $\vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)$ ist die Kraft, die tangential auf die Kurve wirkt, da $\dot{\vec{x}}(t)$ in jedem Punkt $\vec{x}$ der Kurve $\mathcal{C}$ in Richtung der Tangente weist.

c) Für ein Kurvenintegral entlang einer geschlossenen Kurve verwendet man das Symbol

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$$

Die Berechnung von Kurvenintegralen erfolgt in 3 Schritten:

1. Parameterdarstellung der Kurve $\mathcal{C}:\ \vec{x} = \vec{x}(t)$
2. Berechnung von $\dot{\vec{x}}(t)$
3. Die Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ in die Komponenten P, Q, R von $\vec{K}$ einsetzen, das Skalarprodukt $\vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)$ berechnen und die Integration ausführen.

Beispiel 4.1. Betrachte

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x - z \\ xyz \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$, einen Parabelbogen $y = x^2$ in der Ebene $z = 2$ von $A(0, 0, 2)$ nach $B(1, 1, 2)$, d.h.

$$\mathcal{C}:\ \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

$$W = \int_0^1 \left(\underbrace{\begin{pmatrix} t^2 \cdot t^2 \\ t-2 \\ t \cdot t^2 \cdot 2 \end{pmatrix}}_{\vec{K}(\vec{x}(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dot{\vec{x}}(t)} \right) dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^2 - 4t)\, dt = \frac{17}{15}$$

Beispiel 4.2.

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}: \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 2\pi\,.$$

$$\int_{\mathcal{C}} x\,dx + y\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

Bemerkung. In diesem Fall wird entlang einer geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ keine Arbeit verrichtet.

Beispiel 4.3. Man bestimme die Arbeit, die das Kraftfeld $\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \\ z \end{pmatrix}$ bei der Bewegung eines Teilchens entlang des Viertelkreises

$$\mathcal{C}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi/2\,,$$

leistet.

Mit $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x} = \int_{t=0}^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ -\sin t \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} (-2) \sin t \cos^2 t \ dt$$
$$= \frac{2}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.$$

Die Arbeit ist negativ, da das Kraftfeld die Bewegung entlang der Kurve behindert.

Beispiel 4.4. Man berechne $\int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy + z\,dz$, wobei

a) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ die Strecke von $P(-5,-3,0)$ nach $Q(0,2,5)$ ist;

b) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ die Schnittkurve der Flächen $x = 4 - y^2$ und $z = 3 + y$ von $P(-5,-3,0)$ nach $Q(0,2,5)$ ist.

zu a) $\mathcal{C}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t-5 \\ 5t-3 \\ 5t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1\,, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy + z\,dz = \int_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} y^2 \\ x \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} (5t-3)^2 \\ 5t-5 \\ 5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} dt$$
$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 20t + 4)dt = -\frac{35}{3}.$$

zu b) $\mathcal{C}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4-t^2 \\ t \\ 3+t \end{pmatrix}, -3 \le t \le 2\,, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\int_{\mathcal{C}_2} y^2\,dx + x\,dy + z\,dz = \int_{\mathcal{C}_2} \begin{pmatrix} y^2 \\ x \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \int_{-3}^2 \begin{pmatrix} t^2 \\ 4-t^2 \\ 3+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_{-3}^2 (-2t^3 - t^2 + t + 7)dt = \frac{160}{3}.$$

Man bekommt verschiedene Werte für das Linienintegral, obwohl Anfangs- und Endpunkt identisch sind.

4.2. Eigenschaften

Bemerkung. Für gewöhnliche Integrale gelten die folgenden Relationen (siehe Mathematik A):

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Kurvenintegrale besitzen entsprechende Eigenschaften:

- Wählen wir einen Punkt P auf der Kurve $\mathcal{C}$, so teilt dieser $\mathcal{C}$ in zwei Kurven $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ (siehe Abb. 4.1). Wir schreiben $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{K}\,d\vec{x} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{K}\,d\vec{x}$$

- Bezeichnet nun $\mathcal{C}$ die (orientierte) Raumkurve von A nach B und $-\mathcal{C}$ die im entgegengesetzten Sinn von B nach A durchlaufene Kurve (siehe Abb. 4.2). Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x} = -\int_{-\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x}$$

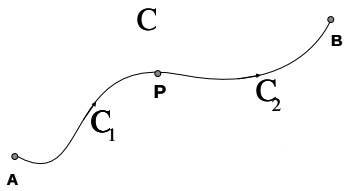


Abbildung 4.1.: $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$

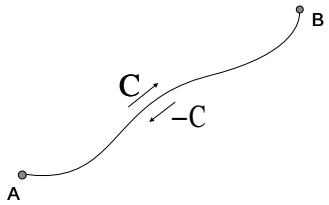


Abbildung 4.2.: $-\mathcal{C}$

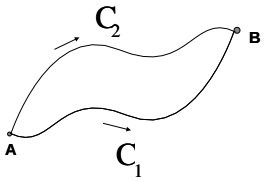


Abbildung 4.3.: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + (-\mathcal{C}_2)$

- Man betrachtet nun zwei orientierte Raumkurven $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, die beide von A nach B laufen und dann die geschlossene Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + (-\mathcal{C}_2)$, die von A über B wieder nach A zurückläuft (siehe Abb. 4.3). Gilt

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x} = 0 \tag{4.1}$$

  so erhält man

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{K}\, d\vec{x} + \int_{-\mathcal{C}_2} \vec{K}\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{K}\, d\vec{x} - \int_{\mathcal{C}_2} \vec{K}\, d\vec{x} = 0$$

  Daraus folgt

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{K}\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{K}\, d\vec{x}$$

  D.h. der Wert des Linienintegrals von A nach B ist unter der Voraussetzung (4.1) vom gewählten Weg unabhängig.

Betrachtet man den Kurvenbogen $\mathcal{C}$ in Parameterform

$$\mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad a \le t \le b\,,$$

mit dem Anfangspunkt $P_0 \equiv \vec{P}_0 := \vec{x}(a)$ und dem Endpunkt $P_1 \equiv \vec{P}_1 := \vec{x}(b)$, so ist die **Bogenlänge** s dieses Kurvenstücks gegeben durch

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

4.3. Gradientenfelder und Kurvenintegrale

In der Regel ist das Kurvenintegral wegabhängig. Für spezielle Vektorfelder ist es jedoch wegunabhängig.

Definition 4.2. Ein Vektorfeld $\vec{K}(x,y,z)$ heißt **Gradientenfeld** oder **Potentialfeld**, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{K}(x,y,z) = \text{grad}\Phi(x,y,z)$$

d.h. für die Komponenten P, Q und R des Vektorfeldes $\vec{K}$ gilt

$$P(x,y,z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y,z),$$
$$Q(x,y,z) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,z),$$
$$R(x,y,z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,y,z).$$

Die Funktion $\Phi(x,y,z)$ heißt eine zu $\vec{K}$ gehörende **Potentialfunktion**.

Bemerkung.

1. Zwei zu $\vec{K}$ gehörende Potentialfunktionen unterscheiden sich höchstens um eine additive Konstante.
2. In der Physik bezeichnet man Kraftfelder, die eine zugehörige Potentialfunktion besitzen, als **konservative Kraftfelder**.
3. Die Gradientenfelder sind diejenigen Vektorfelder, für welche die Kurvenintegrale immer wegunabhängig sind.

Es gilt:

Satz 4.1 (Hauptsatz über Kurvenintegrale).
Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein achsenparalleler Quader und $\vec{K}: G \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann sind folgende Aussagen gleichbedeutend:

1. $\vec{K}$ ist ein Gradientenfeld
2. In G gelten die Integrabilitätsbedingungen
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \qquad \Longleftrightarrow \quad \text{rot}\,\vec{K} = \vec{0}$$
3. Der Wert des Kurvenintegrals $\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$ hängt für alle in G verlaufenden Kurven $\mathcal{C}$ nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.
4. Das Kurvenintegral $\oint_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$ ist für alle in G verlaufenden, geschlossenen Kurven $\mathcal{C}$ stets Null.

Bemerkung. Im Fall eines zweidimensionalen Vektorfeldes $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ lautet die Integrabilitätsbedingung (siehe (1.1), Seite 11)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Berechnung des Kurvenintegrals im Fall eines Gradientenfeldes Sei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \text{grad}\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \Phi_x(x,y,z) \\ \Phi_y(x,y,z) \\ \Phi_z(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Das totale Differential von Φ lautet

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz \\ &= P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \vec{K} \cdot d\vec{x}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x} &= \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi}{dt}\,dt = \Phi(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = \Phi(t_1) - \Phi(t_0) \\ &= \Phi\Big|_{\text{Endpunkt von } \mathcal{C}} - \Phi\Big|_{\text{Anfangspunkt von } \mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Satz 4.2 (Integration eines Gradientenfeldes).
Ist $\vec{K}$ ein Gradientenfeld mit dem Potential Φ, d.h. $\vec{K} = \text{grad}\Phi$, und $\mathcal{C}$ eine von P_1 nach P_2 verlaufende Kurve. Dann ist

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x} = \Phi\Big|_{P_2} - \Phi\Big|_{P_1}$$

Folgerung: Das Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve ist für ein Gradientenfeld $\vec{K}$ stets Null:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x} = \Phi\Big|_{P_1} - \Phi\Big|_{P_1} = 0$$

Beispiel 4.5. Das Vektorfeld

$$\vec{K}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + e^{3z} \\ 3ye^{3z} \end{pmatrix}$$

ist wegen $\text{rot}\vec{K} = \vec{0}$ ein Gradientenfeld.
Daher gibt es eine Potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ mit

$$\Phi_x = y^2 \tag{4.2}$$
$$\Phi_y = 2xy + e^{3z} \tag{4.3}$$
$$\Phi_z = 3ye^{3z} \tag{4.4}$$

Integriert man (4.2) bezüglich x, so erhält man

$$\Phi(x,y,z) = xy^2 + g(y,z) \tag{4.5}$$

wobei $g(y,z)$ eine „Konstante“ bezüglich x ist. Differenziert man (4.5) bezüglich y, so folgt

$$\Phi_y(x,y,z) = 2xy + g_y(y,z)$$

und ein Vergleich mit (4.3) liefert

$$g_y(y,z) = e^{3z}$$

Daher ist $g(y,z) = ye^{3z} + h(z)$, was Relation (4.5) in

$$\Phi(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

überführt. Differenziert man nun nach z und vergleicht das Ergebnis mit (4.4), so erhält man $h'(z) = 0$ und damit $h(z) = C, C \in \mathbb{R}$. Die gesuchte Potentialfunktion ist daher

$$\Phi(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + C$$

Das Kurvenintegral von $\vec{K}$ entlang einer Kurve $\mathcal{C}$ mit dem Anfangspunkt $P_1(x_1,y_1,z_1)$ und dem Endpunkt $P_1(x_2,y_2,z_2)$ ist daher

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}} d\Phi = \Phi\Big|_{P_1}^{P_2} = \Phi(x_2,y_2,z_2) - \Phi(x_1,y_1,z_1) = x_2y_2^2 + y_2e^{3z_2} - \left(x_1y_1^2 + y_1e^{3z_1}\right)$$

Definition 4.3. Ein Kraftfeld $\vec{K}$ heißt **radialsymmetrisch** (= **zentrales Kraftfeld**), wenn der Betrag von $\vec{K}$ nur vom Abstand $r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ abhängt und der Vektor $\vec{K}$ in jedem Punkt radial nach außen zeigt:

$$\vec{K}(\vec{x}) = f(r)\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} f(r)\,x \\ f(r)\,y \\ f(r)\,z \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.6.

a) $\vec{K}(\vec{x}) = -\gamma\dfrac{m_1m_2}{r^3}\,\vec{x}$ Gravitationsfeld

b) $\vec{K}(\vec{x}) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_1q_2}{r^3}\,\vec{x}$ Coulomb'sches Feld

Behauptung. Alle radialsymmetrischen Kraftfelder sind Potentialfelder.
Beweis: Mit $P = f(r)\,x,\ Q = f(r)\,y$ folgt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\,f'(r)\,\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = f'(r)\,\frac{xy}{r}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y\,f'(r)\,\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = f'(r)\,\frac{xy}{r}$$
$$\Longrightarrow \quad P_y = Q_x$$

Analog zeigt man, dass die übrigen Integrabilitätsbedingungen von Satz 4.1 erfüllt sind.

Beispiel 4.7. Die zu den Kraftfeldern von Bsp. 4.6 gehörenden Potentialfunktionen sind

a) $\Phi(x,y,z) = \gamma\dfrac{m_1m_2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ Gravitationspotential

b) $\Phi(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_1q_2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ elektrostatisches Potential

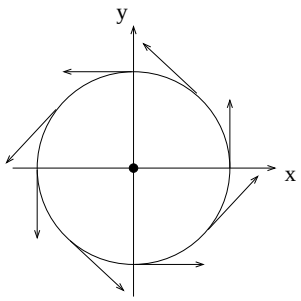
Beispiel 4.8. Ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} E_1(x,y,z) \\ E_2(x,y,z) \\ E_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

ein elektrostatische Feld, so gibt das Kurvenintegral

$$U = \int_{\mathcal{C}} \vec{E}\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}} E_1\, dx + E_2\, dy + E_3\, dz$$

die Potentialdifferenz, d.h. die Spannung zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve $\mathcal{C}$ an.



Beispiel 4.9 (Magnetfeld eines geraden Leiters). Ein homogener in z-Richtung liegender, stromdurchflossener Draht erzeugt in der xy-Ebene ein Magnetfeld proportional zu $\frac{1}{r}$, dessen Richtung tangential zu den Kreislinien $x^2 + y^2 = R^2$ ist:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

also

$$\frac{\partial B_1}{\partial y} = \frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Daher ist $\vec{B}$ ein konservatives Kraftfeld.

Wir berechnen nun noch das Kurvenintegral entlang eines Kreises mit dem Radius R um den Ursprung $(0,0)$:

$$\text{Kreislinie } \mathcal{C}: \ \vec{x}(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,, \quad \dot{\vec{x}}(t) = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\, d\vec{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{x^2(t)+y^2(t)}}_{R^2} \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt$$

$$= \mu_0 I \neq 0 \quad (!!)$$

Begründung: Im Ursprung wird das Feld $\vec{B}$ singulär!

Entlang jeder geschlossenen Kurve, die den Ursprung *nicht* enthält, ist das Kurvenintegral stets Null.

5. Oberflächenintegrale

5.1. Flächen im Raum

Eine Kurve $\mathcal{C}$ im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch eine Parameterdarstellung mit *einem* Parameter

$$\mathcal{C}: \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t_0 \le t \le t_1$$

Eine (gekrümmte) Fläche im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch eine Parameterdarstellung mit *zwei* Parametern:

Definition 5.1. Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ ein Bereich in der Ebene (z.B. Rechteck) in dem die Variablen (= Parameter) (u, v) variieren, d.h. $(u, v) \in S$ (z.B. $u_1(v) \le u \le u_2(v), v_1 \le v \le v_2$). Eine **Fläche** $F \subset \mathbb{R}^3$ wird definiert durch die Parameterdarstellung

$$F: \ \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

wenn x, y, z (stetige, partiell differenzierbare) Funktionen der beiden Variablen (u, v) sind. Beim Durchlaufen aller (u, v)-Werte bewegt sich der Punkt, zu dem der Vektor $\vec{x}(u, v)$ weist, auf der Fläche F.

Die **Tangentialebene an die Fläche** F im Punkt P wird von den Richtungsvektoren

$$\vec{x}_u = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} x_u(u, v) \\ y_u(u, v) \\ z_u(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} x_v(u, v) \\ y_v(u, v) \\ z_v(u, v) \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

Der Normalvektor der Tangentialebene und damit der **Normalvektor der Fläche** F ist dann gegeben durch

$$\vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

Beispiel 5.1. Eine Ebene E im $\mathbb{R}^2$ wird durch die drei Punkte P_0, P_1, P_2 aufgespannt. Mit den Bezeichnungen

$$\vec{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}, \ \vec{x}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \ \vec{x}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}$$

kann dann diese Ebene angegeben werden in der Parameterform

$$E: \ \vec{x}(u, v) = \vec{x}_0 + u\,\vec{x}_1 + v\,\vec{x}_2$$

Beispiel 5.2. Eine Kugelfläche mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Ursprung hat mit den Kugelkoordinaten $u = \varphi, v = \theta$ die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u\ \sin v \\ R\sin u\ \sin v \\ R\cos v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le \pi \end{matrix} \tag{5.1}$$

Der **Flächeninhalt** $\mathcal{O}$ des Flächenstücks

$$F:\ \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in S$$

ist dann gegeben durch

$$\mathcal{O} = \iint_F dF = \iint_S |\vec{x}_u\ \times\ \vec{x}_v|\, du\, dv$$

Beispiel 5.3. Oberfläche der oberen Halbkugel mit dem Radius R.

Aus der Darstellung (5.1) mit $0 \le u \le 2\pi$ und $0 \le v \le \pi/2$ folgt

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} -R\sin u\ \sin v \\ R\cos u\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -R\cos u\ \cos v \\ R\sin u\ \cos v \\ -R\sin v \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_u\ \times\ \vec{x}_v = -R^2\sin v \begin{pmatrix} \cos u\ \sin v \\ \sin u\ \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad |\vec{x}_u\ \times\ \vec{x}_v| = R^2\sin v$$

Damit erhält man

$$\mathcal{O} = \iint_F dF = \int_{u=0}^{2\pi}\int_{v=0}^{\pi/2} R^2\sin v\ dv\, du = 2\pi R^2$$

5.2. Oberflächenintegrale

Definition 5.2. Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld im Raum und F ein Flächenstück in der expliziten Darstellung

$$z = f(x,y)\,, \quad (x,y) \in B$$

oder in Parameterform

$$\vec{x} = \vec{x}(u,v)\,, \quad (u,v) \in S$$

mit dem Normalvektor $\vec{n}$ gegeben durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v\,.$$

Dann heißt das Integral

$$\iint_F \left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right)\,dA := \iint_B \left(\vec{K}(\vec{x})\cdot\vec{n}\right)\,dx\,dy$$
$$= \iint_S \left(\vec{K}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot(\vec{x}_u\times\vec{x}_v)\right)\,du\,dv$$

Oberflächenintegral von $\vec{K}$ über F.
Dabei bezeichnet B den Bereich der Projektion des Flächenstücks F in die xy–Ebene, S bezeichnet den Parameterbereich von (u,v).

Schreibweise: Man schreibt für das Oberflächenintegral auch

$$\iint_F \vec{K}\,d\vec{A} := \iint_F (\vec{K}\cdot\vec{n})\,dA$$

Physikalische Interpretation $\vec{K}$ sei ein stationäres Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. Dann beschreibt

$$\iint_F \left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right)\,dA$$

den Fluss durch F, d.h. das Flüssigkeitsvolumen, das in einer Zeiteinheit durch die Fläche F fließt.

Beispiel 5.4. Betrachte

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z \end{pmatrix}$$

auf dem Bereich F der Ebene $z = x + y + 1$, der über dem Quadrat $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, liegt. Dann gilt

$$\iint_F \left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right)\,dA = \iint_B \left(\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z(x,y) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\,dx\,dy$$
$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (-x^2 - y^2 + x + y + 1)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 (-x^2 - \frac{1}{3} + x + \frac{1}{2} + 1)\,dx = \frac{4}{3}.$$

Beispiel 5.5. Gegeben ist das Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums

$$\vec{K}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

das durch die Halbkugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,,\ z > 0$$

nach oben fließt. Welche Masse fließt pro Zeiteinheit durch dieses Flächenstück?

Wir verwenden wie in Bsp. 5.2 Kugelkoordinaten für die Parameterdarstellung der Halbsphäre:

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u\ \sin v \\ R\sin u\ \sin v \\ R\cos v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le \dfrac{\pi}{2} \end{matrix}$$

Der in Richtung der positiven z-Achse gerichtete Normalvektor ist

$$\vec{n} = -(\vec{x}_u \times \vec{x}_v) = R^2 \sin v \begin{pmatrix} \cos u\ \sin v \\ \sin u\ \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{K}(\vec{x}) \cdot \vec{n} = R^3 \sin v$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} \iint_F (\vec{K}(\vec{x}) \cdot \vec{n})\, dA &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi/2} \vec{K}(\vec{x}(u,v)) \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)\, du\, dv \\ &= R^3 \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi/2} \sin^2 v\ (\sin v + \cos v)\ du\, dv = 2\pi R^3 \end{aligned}$$

Beispiel 5.6. Magnetischer Fluss
Der magnetische Fluss Φ des Magnetfeldes $\vec{B}$ durch die Fläche F ist gegeben durch

$$\Phi = \iint_F (\vec{B} \cdot \vec{n})\, dA$$

Speziell für das Magnetfeld

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(siehe Bsp. 4.9) ist der magnetische Fluss durch die Kreisfläche $x^2 + y^2 \le R^2, z = 0$ gesucht.
Wegen $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $(\vec{B} \cdot \vec{n}) = 0$. Damit ist der gesuchte magnetische Fluss gleich Null.

Beispiel 5.7. Betrachte

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ 3z \end{pmatrix} \quad \text{auf} \quad F : \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{4}uv \end{pmatrix}, \quad |u| \le 1, |v| \le 1.$$

Dann gilt

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{v}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{u}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\frac{v}{4} \\ -\frac{u}{4} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$I = \int_{u=-1}^{1} \int_{v=-1}^{1} \left(\begin{pmatrix} 2u \\ -v \\ \frac{3}{4}uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{v}{4} \\ -\frac{u}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right) du\, dv = \int_{u=-1}^{1} \int_{v=-1}^{1} \frac{uv}{2}\, du\, dv = 0.$$

6. Integralsätze

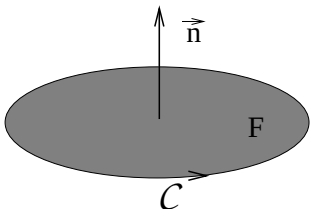
6.1. Satz von Stokes

Der Satz von Stokes stellt einen Zusammenhang her zwischen Kurvenintegralen (über geschlossene Kurven) und Oberflächenintegralen.

Satz 6.1. Sei $\vec{K}$ ein Vektorfeld, F ein Flächenstück im Raum und $\mathcal{C} = \partial F$ der Rand von F. Dann gilt

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}=\partial F} \vec{K}\, d\vec{x} = \iint_F \left(\mathrm{rot}\vec{K} \cdot \vec{n}\right)\, dA.}$$

Die Orientierung von $\mathcal{C}$ und die Flächennormale $\vec{n}$ bilden dabei eine Rechtsschraube.



Physikalische Interpretation Die physikalische Arbeit entlang einer geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ ist gleich dem Fluss des zugehörigen Wirbelfeldes durch ein Flächenstück mit dem Rand $\mathcal{C}$.

Beispiel 6.1. Betrachte

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und F, die obere Halbsphäre mit Radius $R = 1$.

1. Berechnung des Oberflächenintegrals:

   Parameterdarstellung des Flächenstücks:

$$F: \begin{array}{l} x = \cos\varphi \sin\vartheta \\ y = \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \cos\vartheta \end{array}, \quad \begin{array}{c} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \vartheta \le \pi/2 \end{array}$$

$$\mathrm{rot}\vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \iint_F \left(\mathrm{rot}\vec{K}\cdot\vec{n}\right)\,dA = \iint_F \left(\vec{0}\cdot\vec{n}\right)\,dA = 0$$

2. Berechnung des Linienintegrals:

   Parameterdarstellung der Kurve:

$$\mathcal{C}: \begin{array}{l} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \\ z=0 \end{array} \quad , \quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x} = 0 \qquad \text{(siehe Bsp. 4.2)}$$

Bemerkung. Ist $\mathrm{rot}\vec{K}=\vec{0}$, dann ist das Oberflächenintegral stets Null, daher auch das entsprechende Kurvenintegral. Daher hängt der Wert des Kurvenintegrals *nicht* von der Gestalt der Kurve ab.
Ist also ein Feld $\vec{K}$ wirbelfrei, d.h. es ist ein Gradientenfeld ($\mathrm{rot}\vec{K}=\vec{0}$), so ist das Kurvenintegral über $\vec{K}$ wegunabhängig.

6.2. Satz von Gauss

Dieser Satz liefert einen Zusammenhang zwischen einem Oberflächenintegral und einem Dreifachintegral.

Satz 6.2. Sei B ein dreidimensionaler Bereich mit der Randfläche $F=\partial B$ (= geschlossene Fläche) und $\vec{K}$ ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\boxed{\iint_F \left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right)\,dA = \iiint_B \mathrm{div}\vec{K}\,dV}$$

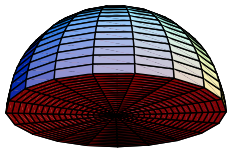
Dabei muss der Normalvektor $\vec{n}$ auf die Fläche F *nach außen* orientiert sein.

Beispiel 6.2. Sei

$$\vec{K}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B\ldots\text{Obere Halbkugel mit Radius } R=1.$$

1. Berechnung des Dreifachintegrals: Wegen $\mathrm{div}\vec{K}=3$ folgt

$$\iiint_B \mathrm{div}\vec{K}\,dV = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} 3r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta = 3\cdot\iiint_B dV = 3\cdot V_{\text{Halbkugel}}$$
$$= 3\frac{2\pi}{3} = 2\pi.$$



2. Berechnung des Oberflächenintegrals:

$$\iint_F \left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right)\,dA = \iint_{F_1} \left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right)\,dA = \iint_{F_2} \left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right)\,dA$$

$F_1 \ldots$ obere Halbsphäre
$F_2 \ldots$ Kreisscheibe $x^2+y^2 \le 1, z=0$

a) Integral über F_1:

$$F_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \vartheta \le \pi/2 \end{matrix}$$

$$\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta = \ldots = -\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin^2\vartheta \\ \sin\varphi\sin^2\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Da $\vec{n}$ nach außen orientiert sein muss, muss die dritte Komponente des Normalvektors > 0 sein! Man muss für $\vec{n}$ also $-(\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta)$ nehmen:

$$\left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right) = \left(\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin^2\vartheta \\ \sin\varphi\sin^2\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix}\right) = \ldots = \sin\vartheta$$

$$I_1 = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta = 2\pi(-\cos\vartheta)\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

b) Integral über F_2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

$$\vec{x}_r \times \vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

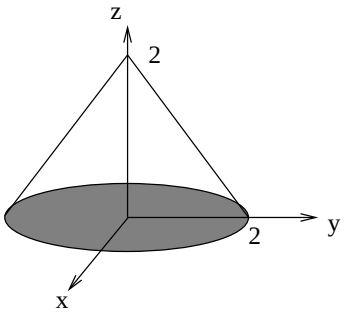
$$\Longrightarrow \quad \left(\vec{K}\cdot\vec{n}\right) = \left(\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad I_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad I = I_1 + I_2 = 2\pi.$$

Beispiel 6.3. Gegeben sei das elektrische Feld

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} x - z \\ x^3 + yz \\ y - 3 \end{pmatrix}.$$

Man berechne den elektrischen Fluss durch die Oberfläche des Kegels mit der Höhe $h = 2$ und dem Radius $R = 2$.



$$\Phi = \iint_F \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \iiint_B \operatorname{div} \vec{E}\, dV$$

Es gilt

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(x - z) + \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + yz) + \frac{\partial}{\partial z}(y - 3) = 1 + z$$

Mit den Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

ergeben sich für den Volumsbereich B die Grenzen

$$0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad 0 \le z \le 2 - r\,, \quad 0 \le r \le 2$$

Damit folgt

$$\Phi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0}^{2-r} (1 + z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz = 4\pi.$$

Beispiel 6.4. Sei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix},$$

$F \ldots$ Oberfläche des Zylinders $x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le z \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen das Oberflächenintegral $I = \iint_F \vec{K} \cdot \vec{n}\, dA$ unter Verwendung des Satzes von Gauß:

$$\operatorname{div}\vec{K} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$$

Zylinder:

$$\begin{gathered} -a \le x \le a \\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \\ 0 \le z \le b \end{gathered}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{array}{cc} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = z & 0 \le z \le b \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_B \operatorname{div}\vec{K}\, dV = \int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{b}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 5r^2\cos^2\varphi\; r\, dr\, d\varphi\, dz \\ &= 5b\frac{a^4}{4}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{5a^4b}{4}\pi \end{aligned}$$

Beispiel 6.5. Die Gesamtladung Q in einem räumlichen Bereich B mit der Randfläche F ist bei einer Ladungsdichte $\varrho(x,y,z)$ gegeben durch

$$Q = \iiint_B \varrho(x,y,z)\, dV$$

Der elektrische Fluss durch die Oberfläche F entspricht bis auf eine Konstante ε_0 der im Gebiet B eingeschlossenen Ladung

$$Q = \varepsilon_0 \iint_F (\vec{E}\cdot\vec{n})\, dA = \iiint_B \varrho(x,y,z)\, dV \tag{6.1}$$

Nach dem Gauss'schen Satz gilt aber für das Oberflächenintegral

$$\iint_F (\vec{E}\cdot\vec{n})\, dA = \iiint_B \operatorname{div}\vec{E}\, dV \tag{6.2}$$

Wegen der Gleichheit der Integranden in (6.1) und (6.2) für jeden Bereich B folgt mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung die Gleichheit der Integranden:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \varrho$$

Die Quellen des elektrischen Feldes stellen die Ladungsdichten dar.

Bemerkung. Da es keine magnetische Ladung gibt, gilt für das Magnetfeld stets

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

6.3. Satz von Green

Dieser Integralsatz ist der Spezialfall des Satzes von Stokes für die Ebene (siehe Satz 1.1). Die ebene, geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ sei positiv orientiert, der von $\mathcal{C}$ eingeschlossene Bereich sei $\mathcal{D}$, die Funktionen P und Q seien in $\mathcal{D}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

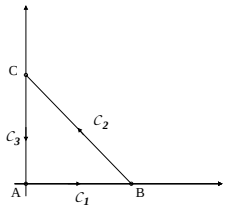
Beispiel 6.6. Man berechne

$$\int_{\mathcal{C}} x^4\,dx + xy\,dy$$

wobei $\mathcal{C}$ der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(0,0)$, $B(1,0)$ und $C(0,1)$ ist.

a) Direkt:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3,$$
$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$



- $I_1 = \int_{\mathcal{C}_1} x^4\,dx + xy\,dy; \quad \mathcal{C}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \le t \le 1\,, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$I_1 = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{5}$$

- $I_2 = \int_{\mathcal{C}_2} x^4\,dx + xy\,dy; \quad \mathcal{C}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1\,, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$I_2 = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^4 \\ (1-t)\cdot t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-t^4 + 4t^3 - 7t^2 + 5t - 1)dt = -\frac{1}{30}$$

- $I_3 = \int_{\mathcal{C}_3} x^4\,dx + xy\,dy, \quad \mathcal{C}_3 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1\,, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$I_3 = \int_2^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0$$

Insgesamt erhält man

$$I = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} + 0 = \frac{1}{6}.$$

b) Über Green'schen Satz:

$$I = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{x^4}_{P} dx + \underbrace{xy}_{Q} dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\mathcal{D}: 0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le 1 - x$$

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} (y - 0)\,dy dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

Beispiel 6.7. Man berechne

$$\int_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy,$$

wobei $\mathcal{C}$ die Kreislinie $x^2 + y^2 = 9$ darstellt.

Die direkte Berechnung des Kurvenintegrals ist praktisch unmöglich. Wir wählen den Weg über den GREEN'schen Satz:

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(7x + \sqrt{y^4+1})}_{=7} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\sin x})}_{=3} \big] dA = \iint_{\mathcal{D}} 4\,dA = 4 \iint_{\mathcal{D}} dA.$$

Dabei ist $\mathcal{D}$ die Kreisscheibe $x^2 + y^2 \le 9$ mit dem Radius $r = 3$. Ihr Flächeninhalt ist

$$A_K = \iint_{\mathcal{D}} dA = 9\pi.$$

Damit erhält man

$$I = 4\,A_K = 36\pi.$$

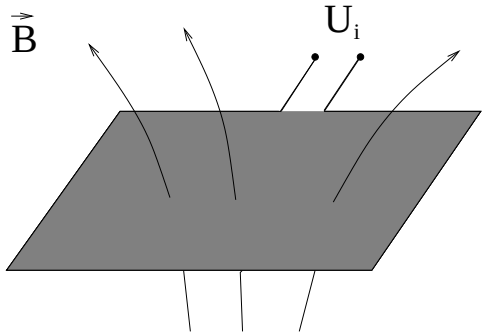
6.4. MAXWELL'sche Gleichungen

Sie bilden die Glanzstücke der mathematischen Physik des 19. Jahrhunderts und beschreiben alle Phänomene der klassischen Elektrodynamik.

Die Grundlage bilden vier physikalische Gesetzmäßigkeiten.

6.4.1. Das FARADAY'sche Induktionsgesetz

Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in einer Leiterschleife induziert eine Spannung.



$$U_i = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \vec{B}\,d\vec{A}$$

Ist F zeitlich konstant, so folgt

$$U_i = -\iint_F \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{B} \right) d\vec{A}$$

Die induzierte Spannung ist mit dem elektrischen Feld verknüpft über (siehe Bsp. 4.8)

$$U_i = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\, d\vec{x} = \iint_F \mathrm{rot}\vec{E}\, d\vec{A}$$

Die letzte Umformung ergibt sich aus dem STOKES'schen Satz. Damit folgt

$$\iint_F \mathrm{rot}\vec{E}\, d\vec{A} = \iint_F \left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) d\vec{A}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt schließlich

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}}$$

6.4.2. GAUSS'sches Gesetz der Elektrostatik

Der Fluss des elektrischen Feldes ist proportional zur Gesamtladung Q.

$$\iint_F \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

Dabei bezeichnet ε_0 die Dielektrizitätskonstante (= elektrische Feldkonstante) und F die den räumlichen Bereich B berandende Fläche.

Ist $\varrho(x, y, z)$ die Ladungsverteilung innerhalb des Bereichs B, so gilt

$$Q = \iiint_B \varrho(x, y, z)\, dV$$

Damit folgt

$$\frac{1}{\varepsilon_0} Q = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_B \varrho(x, y, z)\, dV = \iint_F \vec{E}\, d\vec{A}$$

Für das Doppelintegral gilt nach dem GAUSS'schen Integralsatz

$$\iint_F \vec{E}\, d\vec{A} = \iiint_B \mathrm{div}\vec{E}\, dV$$

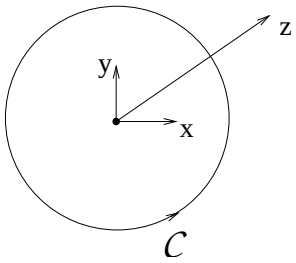
und damit erhält man

$$\iiint_B \mathrm{div}\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_B \varrho(x, y, z)\, dV$$

d.h.

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}}$$

D.h. die Quellen des elektrischen Feldes sind die Ladungsdichten.



6.4.3. AMPERE'sches Gesetz

Ein stromdurchflossener Leiter induziert ein Magentfeld.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\, d\vec{x} = \mu_0 I$$

Dabei weise der Stromfluss in Richtung der z-Achse.
Mit μ_0 bezeichnet man die Permeabilitätskonstante (= magnetische Feldkonstante).

Ist $\vec{j}$ die Stromdichte innerhalb der durch $\mathcal{C}$ festgelegten Fläche F, dann ist der Strom gegeben durch

$$I = \iint_F \vec{j}\, d\vec{A}$$

Mit dem STOKES'schen Integralsatz folgt

$$\mu_0\, I = \mu_0 \iint_F \vec{j}\, d\vec{A} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\, d\vec{x} = \iint_F \mathrm{rot}\vec{B}\, d\vec{A}$$

und schließlich

$$\iint_F \mu_0\, \vec{j}\, d\vec{A} = \iint_F \mathrm{rot}\vec{B}\, d\vec{A}$$

Diese Relation gilt für alle Flächen F und daher gilt die Relation

$$\boxed{\mu_0\, \vec{j} = \mathrm{rot}\vec{B}}$$

Da das Magnet quellenfrei ist (es gibt keine magnetischen Monopole), folgt

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0}.$$

Damit erhält man die vier Gleichungen

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{6.3}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\, \vec{j}, \tag{6.4}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\, \vec{B}, \tag{6.5}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0. \tag{6.6}$$

Bildet man von (6.4) die Divergenz, so folgt wegen $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{K}) = 0$ für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{K}$

$$\mathrm{div}\left(\mu_0\, \vec{j}\right) = 0$$

d.h. die Divergenz der Stromdichte ist Null, was allerdings im Widerspruch steht zur

6.4.4. Kontinuitätsgleichung

Die zeitliche Änderung der Gesamtladung in einem räumlichen Bereich B ist gleich dem Stromfluss durch seine Oberfläche F.

$$\frac{\partial}{\partial t}Q = \iiint_B \frac{\partial}{\partial t}\varrho(x,y,z)\,dV = -\iint_F \vec{j}\,d\vec{A} = -\iiint_B \mathrm{div}\vec{j}\,dV$$

wobei die letzte Umformung

$$\iiint_B \mathrm{div}\vec{j}\,dV = \iint_F \vec{j}\,d\vec{A}$$

aus dem GAUSS'schen Integralsatz folgt. Damit ergibt sich insgesamt:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varrho = -\mathrm{div}\vec{j}} \qquad (\textbf{Kontinuitätsgleichung})$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\varrho \overset{(6.3)}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\,\mathrm{div}\vec{E}\right) = \mathrm{div}\left(-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{div}\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) = 0$$

$\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ $\cdots$ MAXWELL'scher Gesamtstrom

$\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ $\cdots$ Verschiebungstrom

Ersetzt man nun in Glg. (6.4) $\vec{j}$ durch $\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}$, so sind die Gleichungen (6.3) – (6.6) widersruchsfrei und man erhält die MAXWELL'schen Gleichungen für das Vakuum

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\ \\ \mathrm{div}\vec{E} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ \mathrm{rot}\vec{B} &= \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{aligned}}$$

Bemerkung. Spezialfälle der MAXWELL'schen Gleichungen

- Für $\varrho \equiv 0$ und $\vec{j} \equiv \vec{0}$ genügen die Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ der **Wellengleichung**.
- Der zeitunabhängige Fall führt auf die **Poisson'sche Gleichung** $\Delta\Phi = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}$ für die zugehörige Potentialfunktion Φ; im ladungsfreien Raum ($\varrho \equiv 0$) folgt daraus die **Potentialgleichung** $\Delta\Phi = 0$.

7. Partielle Differentialgleichungen

7.1. Wellengleichung

7.1.1. Homogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung

Wiederholung von MATHEMATIK B:

$$\begin{aligned} \text{homogene DGL:} &\quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ \text{homogene RB:} &\quad u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ \text{AB:} &\quad u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

Produktansatz: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad \Longrightarrow$

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x\ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Superposition:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Bestimmung der Koeffizienten a_n, b_n aus den AB:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx\ , \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

7.1.2. Inhomogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{inhomogene DGL:} &\quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + \varphi(x,t) \\ \text{homogene RB:} &\quad u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ \text{AB:} &\quad u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$ mit

- w Lösung der hom. DGL + hom. RB + AB
  Lösung: Siehe 7.1.1
- z Lösung der inhom. DGL + hom. RB + hom. AB
  - Ansatz für z:
    $$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{7.1}$$
  - Entwicklung von $\varphi(x,t)$ bzgl. x in eine Fourierreihe:
    $$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{7.2}$$

Durch Einsetzen von (7.1) und (7.2) in die inhom. DGL erhält man nach Koeffizientenvergleich eine gewöhnliche DGL für $Z_n(t)$:

$$Z_n''(t) + c^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} Z_n(t) = \varphi_n(t)\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

mit den AB $Z_n(0) = Z_n'(0) = 0$

7.1.3. Inhomogene Differentialgleichung und inhomogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{inhomogene DGL:} &\quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + \varphi(x,t) \\ \text{inhomogene RB:} &\quad u(0,t) = r(t)\,,\ u(l,t) = s(t) \\ \text{AB:} &\quad u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$ mit

- $z(x,t) = r(t) + \frac{x}{l}(s(t) - r(t))$
- Für $w(x,t)$ ergibt sich damit eine DGL mit homog. RB:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= c^2 w_{xx} + \varphi^*(x,t) \\ w(0,t) &= w(l,t) = 0 \\ w(x,0) &= f^*(x),\ w_t(x,0) = g^*(x) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi^*(x,t) &= \varphi(x,t) - z_{tt}(x,t) \\ f^*(x) &= f(x) - z(x,0) \\ g^*(x) &= g(x) - z_t(x,0) \end{aligned}$$

Lösung: Siehe 7.1.2

7.2. Diffusionsgleichung

7.2.1. Homogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung

Wiederholung von MATHEMATIK B:

$$\begin{aligned} \text{homogene DGL:} &\quad u_t = c^2 u_{xx} \\ \text{homogene RB:} &\quad u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ \text{AB:} &\quad u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

Produktansatz: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad \Longrightarrow$

$$u_n(x,t) = a_n e^{-c^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Superposition:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Bestimmung des Koeffizienten a_n aus der AB:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

7.2.2. Inhomogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{inhomogene Dgl:} \quad & u_t = c^2 u_{xx} + \varphi(x,t) \\ \text{homogene RB:} \quad & u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ \text{AB:} \quad & u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$ mit

- w Lösung der hom. DGL + hom. RB + AB
  Lösung: Siehe 7.2.1
- z Lösung der inhom. DGL + hom. RB + hom. AB
  - Ansatz für z:
    $$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{7.3}$$
  - Entwicklung von $\varphi(x,t)$ bzgl. x in eine Fourierreihe:
    $$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{7.4}$$

  Durch Einsetzen von (7.3) und (7.4) in die inhom. DGL erhält man nach Koeffizientenvergleich eine gewöhnliche DGL für $Z_n(t)$:

  $$Z_n'(t) + c^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} Z_n(t) = \varphi_n(t)\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

  mit der AB $Z_n(0) = 0$

7.2.3. Inhomogene Differentialgleichung und inhomogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{inhomogene DGL:} \quad & u_t = c^2 u_{xx} + \varphi(x,t) \\ \text{inhomogene RB:} \quad & u(0,t) = r(t)\,,\ u(l,t) = s(t) \\ \text{AB:} \quad & u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$ mit

- $z(x,t) = r(t) + \frac{x}{l}(s(t) - r(t))$
- Für $w(x,t)$ ergibt sich damit eine DGL mit homog. RB:

  $$\begin{aligned} w_t &= c^2 w_{xx} + \varphi^*(x,t) \\ w(0,t) &= w(l,t) = 0 \\ w(x,0) &= f^*(x) \end{aligned}$$

  mit

  $$\begin{aligned} \varphi^*(x,t) &= \varphi(x,t) - z_t(x,t), \\ f^*(x) &= f(x) - z(x,0). \end{aligned}$$

  Lösung: Siehe 7.2.2.

7.3. Schwingende Membran

Wir betrachten einen Bereich B in der xy-Ebene, der von der „Randkurve“ ∂B begrenzt wird, siehe Abb. 7.1. Eine dünne, homogene Membran sei über ∂B gespannt.

Gesucht ist die Auslenkung

$$z = z(x, y, t)$$

der Membran aus der Ruhelage im Punkt (x, y) zur Zeit t.

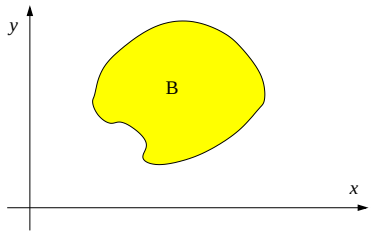


Abbildung 7.1.: Bereich

Differentialgleichung: Für alle $(x, y) \in B$, $t > 0$

$$z_{tt} = c^2 \cdot \Delta z = c^2 \cdot (z_{xx} + z_{yy}) .$$

Randbedingung: Für alle $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial B$

$$z(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$$

Anfangsbedingung: Für alle $(x, y) \in B$

$$z(x, y, 0) = f(x, y),$$
$$z_t(x, y, 0) = g(x, y).$$

Wir fordern (analog zur schwingenden Saite)

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$$

für alle $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial B$.

Für einen beliebigen Bereich B kann die Lösung hier nicht angegeben werden. Wir betrachten nur den Spezialfall der rechteckigen und der kreisrunden Membran.

7.3.1. Rechteckige Membran

Betrachte

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a\,,\ 0 < y < b\right\}.$$

Randbedingung:

- Für alle $0 \le y \le b$

$$z(0, y, t) = 0,$$
$$z(a, y, t) = 0.$$

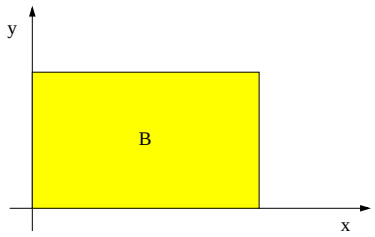


Abbildung 7.2.: Rechteckige Membran

- Für alle $0 \leq x \leq a$

$$z(x,0,t) = 0,$$
$$z(x,b,t) = 0$$

Anfangsbedingung: Für alle $(x,y) \in B$

$$z(x,y,0) = f(x,y),$$
$$z_t(x,y,0) = g(x,y).$$

Lösungsweg:

1. **Trennung von Zeit- und Ortsvariablen**:

$$z(x,y,t) = H(x,y) \cdot T(t),$$
$$z_{tt} = H(x,y) \cdot T''(t),$$
$$z_{xx} = H_{xx}(x,y) \cdot T(t),$$
$$z_{yy} = H_{yy}(x,y) \cdot T(t).$$

   Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt das

$$H \cdot T'' = c^2 \cdot (H_{xx} \cdot T + H_{yy} \cdot T)$$

   und nach Division durch $c^2 \cdot H \cdot T$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{1}{H}(H_{xx} + H_{yy}) = \frac{\Delta H}{H} = \lambda = \text{const.},$$

   also eine gewöhnliche Differentialgleichung für $T(t)$,

$$T'' - c^2 \cdot \lambda \cdot T = 0,$$

   und eine partielle Differentialgleichung für $H(x,y)$ (Helmholtz-Gleichung),

$$\Delta H - \lambda \cdot H = 0.$$

2. **Trennung der Ortsvariablen**:

$$H(x,y) = F(x) \cdot G(y),$$
$$H_{xx} = F''(x) \cdot G(y),$$
$$H_{yy} = F(x) \cdot G''(y).$$

Eingesetzt liefert das

$$F'' \cdot G + F \cdot G'' - \lambda \cdot F \cdot G = 0,$$

also

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} = \lambda$$

und somit

$$\underbrace{\frac{F''}{F}}_{\text{von } x \text{ abh.}} = \underbrace{\lambda - \frac{G''}{G}}_{\text{von } y \text{ abh.}} = \nu = \text{const.}$$

Es ergeben sich also die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} F'' - \nu \cdot F &= 0, \\ G'' + (\nu - \lambda) \cdot G &= 0. \end{aligned}$$

3. **Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingung**:

$$\begin{aligned} z(0,y,t) = F(0) \cdot G(y) \cdot T(t) = 0 \qquad &\Rightarrow F(0) = 0 \\ z(a,y,t) = F(a) \cdot G(y) \cdot T(t) = 0 \qquad &\Rightarrow F(a) = 0 \\ z(x,0,t) = F(x) \cdot G(0) \cdot T(t) = 0 \qquad &\Rightarrow G(0) = 0 \\ z(x,b,t) = F(x) \cdot G(b) \cdot T(t) = 0 \qquad &\Rightarrow G(b) = 0. \end{aligned}$$

Für $F(x)$ ist folgendes Problem analog zum Problem bei der schwingenden Saite zu lösen:

$$F'' - \nu \cdot F = 0, \qquad F(0) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Setze $\nu = -p^2$, $p \in \mathbb{R}$ und erhalte die Lösung

$$F(x) = A \cdot \cos px + B \cdot \sin px.$$

Die eingesetzte Randbedingung liefert

$$\begin{aligned} F(0) = 0 : \qquad & A = 0 \\ F(a) = 0 : \qquad & B \cdot \sin pa = 0, \end{aligned}$$

somit $B = 0$ oder $\sin pa = 0$, was wiederum $pa = m\pi$, $m \in \mathbb{N}$, bedeutet. Somit $p = \frac{m\pi}{a}$, also sind die Eigenwerte

$$\nu = -p^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

und die Eigenfunktionen

$$F_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} \cdot x, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Für $G(y)$ ist folgendes Problem zu lösen:

$$G'' + (\nu - \lambda) \cdot G = 0, \qquad G(0) = 0, \quad G(b) = 0.$$

Setze $\nu - \lambda = q^2$, dann folgt

$$G(y) = A\cos qy + B\sin qy.$$

Die Randbedingung liefert

$$\begin{aligned} G(0) = 0: &\qquad A = 0 \\ G(b) = 0: &\qquad B\cdot\sin qb = 0, \end{aligned}$$

somit $qb = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, also $q = \frac{n\pi}{b}$. Das liefert die Eigenfunktionen

$$G_n(y) = \sin\frac{n\pi}{b}\cdot y, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die gemeinsamen Eigenwerte sind also

$$\lambda_{m,n} = \nu - q^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Differentialgleichung für $T(t)$:

$$T'' - c^2\lambda T = 0.$$

Setze

$$\lambda_{m,n} = -\mu_{mn}^2 = -\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right),$$

somit

$$T'' + c^2\cdot\mu_{mn}^2\cdot T = 0,$$

d.h.

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cdot\cos c\mu_{mn}t + B_{mn}\cdot\sin c\mu_{mn}t.$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned} z_{mn}(x,y,t) &= F_m(x)\cdot G_n(y)\cdot T_{mn}(t) \\ &= (A_{mn}\cdot\cos c\mu_{mn}t + B_{mn}\cdot\sin c\mu_{mn}t)\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y. \end{aligned}$$

Die Funktionen $z_{mn}(x,y,t)$ erfüllen die Differentialgleichung und die Randbedingung!

4. **Superpositionsprinzip und Berücksichtigung der Anfangsbedingung**: Setze

$$\begin{aligned} z(x,y,t) &= \sum_{m,n} z_{mn}(x,y,t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cdot\cos c\mu_{mn}t + B_{mn}\cdot\sin c\mu_{mn}t)\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung lautet

$$\begin{aligned} z(x,y,0) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{y} \overset{!}{=} f(x,y), \\ z_t(x,y,0) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\cdot c\cdot\mu_{mn}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \overset{!}{=} g(x,y). \end{aligned}$$

a) Wir setzen f und g schiefsymmetrisch auf $-a < x < a$ bzw. $-b < y < b$ fort.

b) Wir setzen f ung g periodisch mit der Periode $2a$ (in x) und $2b$ (in y) fort.

Jedenfalls können f und g in Doppel-FOURIER-Sinusreihen entwickelt werden:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y,$$
$$g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cdot \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y,$$

mit

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} f(x,y) \cdot \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \; dx \; dy,$$
$$b_{mn} = \frac{4}{ab}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} g(x,y) \cdot \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \; dx \; dy.$$

Koeffizientenvergleich in den Anfangsbedingungen liefert schließlich

$$A_{mn} = a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} f(x,y) \cdot \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \; dx \; dy,$$
$$B_{mn} = \frac{b_{mn}}{c\,\mu_{mn}} = \frac{4}{abc\,\mu_{mn}}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} g(x,y) \cdot \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \; dx \; dy.$$

7.3.2. Kreisförmige Membran

Wir betrachten die Schwingungsgleichung

$$U_{tt} = c^2(U_{xx} + U_{yy})$$

in der Kreisscheibe $K_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ mit der Randbedingung

$$U = 0 \quad \text{auf } \partial K_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen folgen später.

Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad\qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Somit

$$r_x = \frac{x}{r},$$
$$\varphi_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}.$$

Mit $U(x,y,t) = u(r,\varphi,t)$ gilt also

$$\begin{aligned}
U_{tt} &= u_{tt} \\
U_x &= u_r r_x + u_\varphi \varphi_x = \frac{x}{r} u_r - \frac{y}{r^2} u_\varphi \\
U_{xx} &= \frac{1}{r} u_r - \frac{x^2}{r^3} u_r + \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r} u_{rr} - \frac{y}{r^2} u_{r\varphi}\right) + \frac{2xy}{r^4} u_\varphi - \frac{xy}{r^3} u_{r\varphi} + \frac{y^2}{r^4} u_{\varphi\varphi} = \\
&= \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - \frac{2xy}{r^3} u_{r\varphi} + \frac{y^2}{r^4} u_{\varphi\varphi} + \frac{y^2}{r^3} u_r + \frac{2xy}{r^4} u_\varphi \\
U_{yy} &= \frac{y^2}{r^2} u_{rr} - \frac{2xy}{r^3} u_{r\varphi} + \frac{x^2}{r^4} u_{\varphi\varphi} + \frac{x^2}{r^3} u_r + \frac{2xy}{r^4} u_\varphi \quad \text{(analog)} \\
U_{tt} &= c^2 (U_{xx} + U_{yy}) \\
u_{tt} &= c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right) = c^2 \triangle u.
\end{aligned}$$

Annahme: Radialsymmetrisches Problem, d.h. u hängt nicht vom Winkel φ ab. Dies führt zur Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) \tag{7.5}$$

mit der Randbedingung

$$u(R,t) = 0 \tag{7.6}$$

und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
u(r,0) &= f(r) \\
u_t(r,0) &= g(r).
\end{aligned}$$

(Annahme: AB seien auch radialsymmetrisch, da diese auf radialsymmetrische Lösungen führen.)

1. Schritt Produktansatz:

$$u(r,t) = W(r) \cdot T(t)$$

Somit

$$\begin{aligned}
WT'' &= c^2 \left(W''T + \frac{1}{r} W'T \right) \\
\frac{T''}{c^2 T} &= \frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r} W' \right) = -k^2
\end{aligned}$$

(wobei k konstant), also

$$W'' + \frac{1}{r} W' + k^2 W = 0 \tag{7.7}$$

$$T'' + k^2 c^2 T = 0 \tag{7.8}$$

mit der Randbedingung

$$\begin{aligned}
& u(R,t) = W(R) \cdot T(t) = 0 \\
\Rightarrow\ & W(R) = 0.
\end{aligned}$$

2. Schritt Lösen der Differentialgleichung für W:

$$\text{Setze } s := kr: \quad W(r) = w(s), \quad W' = w' \frac{ds}{dr} = kw, \quad W'' = k^2 w''.$$

Aus (7.7) ergibt sich

$$k^2 w'' + \frac{k}{s} k w' + k^2 w = 0,$$

also

$$w'' + \frac{w'}{s} + w = 0,$$

eine BESSELsche Differentialgleichung (siehe Anhang A.2) zum Index $\nu = 0$ mit der Lösung

$$w(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s).$$

Da $Y_0(s)$ für $s \to 0$ gegen ∞ strebt, die Lösung aber für $r \to 0$ beschränkt sein soll, wählen wir $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$. D.h.

$$W(r) = J_0(kr).$$

Die Randbedingung lautet

$$W(R) = J_0(kR) = 0.$$

Wähle k so, dass kR eine Nullstelle der BESSEL-Funktion J_0 ist:

$$kR = \alpha_m$$

mit $J_0(\alpha_m) = 0$ für $m = 1, 2, \ldots$.

Wir erhalten die Eigenwerte

$$k_m = \frac{\alpha_m}{R},$$

und die Eigenfunktionen

$$W_m(r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right).$$

Für $T(t)$ folgt aus (7.8) mit $k_m c = \lambda_m$ die Differentialgleichung

$$T'' + \lambda_m^2 T = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$T(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t.$$

Damit ist

$$u_m(r,t) = W_m(r) T_m(t) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)(a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (7.5), die die Randbedingung (7.6) erfüllt.

Das sind in t periodische Funktionen, ihre Frequenz ist

$$\begin{aligned} \nu_m &= \frac{\lambda_m}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} k_m \\ \nu_1 &= \frac{c}{2\pi} k_1 = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{\alpha_1}{R} \\ \nu_2 &= \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{\alpha_2}{R}. \end{aligned}$$

d.h. die Frequenzen stehen in keinem ganzzahligen Verhältnis zueinander.

3. Schritt Superposition:

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)$$

ist Lösung der Differentialgleichung, die die Randbedingung erfüllt. Betrachte Anfangsbedingung

$$u(r,0) = f(r),$$

also

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = f(r).$$

Satz 7.1. Für jedes feste $n \in \mathbb{N}_0$ bilden die BESSEL-Funktionen

$$J_n\left(\frac{\alpha_1}{R} r\right), J_n\left(\frac{\alpha_2}{R} r\right), \ldots$$

auf $[0, R]$ eine orthogonale Funktionenfamilie bzgl. der Gewichtsfunktion $\rho = r$, d.h. für das Skalarprodukt gilt

$$\left\langle J_n\left(\frac{\alpha_i}{R} r\right), J_n\left(\frac{\alpha_j}{R} r\right) \right\rangle := \int_0^R r J_n\left(\frac{\alpha_i}{R} r\right) J_n\left(\frac{\alpha_j}{R} r\right)\, dr = \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_i) & \text{für } i = j \end{cases}.$$

Daher ist

$$a_m = \frac{\int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)\, dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)\, dr.$$

Aus dem 2. Anfangswert

$$u_t(r,0) = g(r)$$

ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \lambda_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = g(r)$$

und somit

$$b_m \lambda_m = \frac{\int r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)\, dr}{\frac{R^2 J_1^2(\alpha_m)}{2}}$$

$$b_m = \frac{2}{\lambda_m R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)\, dr.$$

7.4. Potential einer Kugel

Wir betrachten die Potentialgleichung im $\mathbb{R}^3$

$$\triangle U = 0$$

für $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ oder $x^2 + y^2 + z^2 > R^2$, d.h. einmal wird der Innenraum und dann der Außenraum der Sphäre mit dem Radius R betrachtet.

Mit Hilfe von *Kugelkoordinaten*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \qquad\qquad U(x,y,z) = u(r,\varphi,\vartheta) \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

lautet der LAPLACE-Operator

$$\begin{aligned} \triangle u &= u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta} + \frac{\cot\vartheta}{r^2}u_\vartheta + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}u_{\varphi\varphi} \\ &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right). \end{aligned}$$

Auf der Kugeloberfläche $K : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sei das elektrische Potential in folgender Form vorgegeben:

$$u(R,\varphi,\vartheta) = f(\vartheta).$$

Gesucht ist das elektrostatische Potential im Innenraum bzw. im Außenraum. Im zweiten Fall tritt noch die Bedingung

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\varphi,\vartheta) = 0$$

dazu.

Da das Potential auf K nicht vom Winkel φ abhängt, wird es auch im Raum von φ unabhängig sein, d.h. $u = u(r,\vartheta)$. Wir betrachten also folgendes Randwertproblem:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) = 0 \tag{7.9}$$

$$u(R,\vartheta) = f(\vartheta) \tag{7.10}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\vartheta) = 0 \quad \text{(für Außenraumproblem).} \tag{7.11}$$

Produktansatz

$$u(r,\vartheta) = G(r)\cdot H(\vartheta),$$

führt auf

$$\frac{1}{G}\frac{d}{dr}(r^2G'(r)) = -\frac{1}{H\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta H'(\vartheta)) = k \quad \text{(const.)}$$

und somit

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta H') + kH = 0 \tag{7.12}$$

$$\frac{d}{dr}(r^2G') - kG = 0. \tag{7.13}$$

Lösung von (7.13)**:**

$$r^2G'' + 2rG' - kG = 0$$

ist eine EULER'sche Differentialgleichung, die mit dem Ansatz $G(r) = r^\alpha$ auf

$$\alpha^2 + \alpha - k = 0,$$

also

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + k}$$

führt. Zur Vereinfachung setzen wir $k = n(n+1)$, somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n, & \alpha_2 &= -(n+1) \\ G_n(r) &= r^n, & G_n^* &= r^{-n-1}. \end{aligned}$$

Lösung von (7.12)**:** Substituiere

$$\begin{aligned} \cos\vartheta &=: w \\ \sin^2\vartheta &= 1 - w^2 \\ \frac{d}{d\vartheta} &= -\sin\vartheta\frac{d}{dw} \\ H(\vartheta) &= \hat{H}(w) \end{aligned}$$

und erhalte so

$$(1-w^2)\hat{H}'' - 2w\hat{H}' + n(n+1)\hat{H} = 0$$

(LEGENDRE'sche Differentialgleichung, siehe Anhang A.1). Für $n = 0, 1, 2\cdots$ erhalten wir als Lösungen die LEGENDRE'schen Polynome

$$\hat{H}_n(w) = P_n(w) = P_n(\cos\vartheta).$$

Anmerkung: Man kann zeigen, dass es notwendig ist, $n \in \mathbb{N}_0$ zu wählen, um eine auf $-1 \le w \le 1$ oder $0 \le \vartheta \le \pi$ stetig differenzierbare Funktion zu erhalten. Damit gilt

$$\begin{aligned} u_n &= A_n r^n P_n(\cos\vartheta), \quad A_n \in \mathbb{R} && \text{(für Innenraumaufgaben geeignet)}, \\ u_n^* &= \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta), \quad B_n \in \mathbb{R} && \text{(für Außenraumaufgaben geeignet)}. \end{aligned}$$

7.4.1. Innenraumproblem

Die Funktionen u_n sind Lösungen der Differentialgleichung (7.9), die im Ursprung regulär sind. Eine Superposition liefert

$$u(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\vartheta).$$

Die Randbedingung (7.10) lautet

$$u(R,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\vartheta) = f(\vartheta).$$

Die Funktion f wird also (in eine verallgemeinerte FOURIER-Reihe) nach den LEGENDRE-Polynomen entwickelt:

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= f(\arccos(\cos\vartheta)) = \tilde{f}(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(\cos\vartheta) \end{aligned}$$

Für die Funktionen $P_n, n \in \mathbb{N}$, gelten die Relationen

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n, m, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\, dx = \frac{2}{2m+1} \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0$$

d.h. mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$ gilt

$$\langle P_n, P_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \neq n, m, n \in \mathbb{N}_0 \\ \dfrac{2}{2m+1} & \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Man sagt, die LEGENDRE-Funktionen $P_0, P_1, P_2, \ldots$ sind *orthogonal* auf $[-1, 1]$.

Damit erhält man nun die Koeffizienten β_n in der Form

$$\beta_n = \frac{\int_{-1}^{1} \tilde{f}(w) P_n(w)\ dw}{\int_{-1}^{1} P_n^2(w)\ dw} = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta\ d\vartheta.$$

Daraus folgt mit $A_n = \frac{\beta_n}{R^n}$ für die Lösung des Innenraumproblems

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\vartheta)$$

mit

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta\ d\vartheta.$$

7.4.2. Außenraumproblem

Die Funktion

$$u^*(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta)$$

erfüllt die Differentialgleichung (7.9) und die Randbedingung (7.11). Analog zu den vorigen Überlegungen folgt unter Beachtung der Randbedingung (7.10)

$$\frac{B_n}{R^{n+1}} = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta\ d\vartheta$$

die Lösung des Außenraumproblems in der Form

$$u^*(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta)$$

mit

$$B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta\ d\vartheta.$$

7.5. Wärmeleitung auf der Kreisscheibe

Wir lösen das Wärmeleitungsproblem

$$\triangle u = a^2 u_t$$

mit $\vec{x} = (x, y)$ und

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}) && \text{für } \|\vec{x}\| \leq R, \\ u(\vec{x}, t) &= 0 && \text{für } \|\vec{x}\| = R, \\ \text{bzw. } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}, t) &= 0 && \text{für } \|\vec{x}\| = R. \end{aligned}$$

Dazu setzen wir $u(\vec{x}, t) = \tilde{X}(\vec{x})T(t)$ an. Dies ergibt für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\triangle \tilde{X}}{\tilde{X}} = a^2 \frac{T'}{T}.$$

Da die linke Seite nur von der Ortsvariablen, die rechte nur von der Zeit abhängt, müssen beide konstant sein, also $= -\mu^2$ (die Wahl der Konstanten ≤ 0 wird sich später rechtfertigen). Wir bekommen daher zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \triangle \tilde{X} &= -\mu^2 \tilde{X}, \\ a^2 T' &= -\mu^2 T. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung wird durch $T(t) = \exp\left(-\frac{\mu^2}{a^2} t\right)$ gelöst; die erste bleibt noch zu lösen. Dazu führen wir Polarkoordinaten ein und erhalten mit $\tilde{X}(\vec{x}) = X(r, \varphi)$

$$\triangle X(r, \varphi) = \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} = -\mu^2 X.$$

Mit dem Produktansatz $X(r, \varphi) = P(r)\Phi(\varphi)$ erhält man

$$P''\Phi + \frac{1}{r}P'\Phi + \frac{1}{r^2}P\Phi'' = -\mu^2 P\Phi$$

und nach Division durch $P\Phi$ und Ordnen

$$r^2 \frac{P''}{P} + r\frac{P'}{P} + \mu^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Die linke Seite hängt nur von r, die rechte nur von φ ab, wodurch beide Seiten konstant $= -\lambda^2$ sein müssen.

Wir lösen zuerst

$$\Phi'' = -\lambda^2 \Phi,$$

wobei sich aus der notwendigen Periodizität von Φ die periodischen Randbedingungen

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad \text{und} \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

ergeben. Die Lösungen lauten dann

$$\Phi(\varphi) = A \cos \lambda\varphi + B \sin \lambda\varphi,$$

wobei die Randbedingungen noch zu erfüllen sind:

$$\Phi(0) = A = \Phi(2\pi) = A\cos 2\lambda\pi + B\sin 2\lambda\pi$$
$$\Phi'(0) = \lambda B = \Phi'(2\pi) = -\lambda A\sin 2\lambda\pi + \lambda B\cos 2\lambda\pi.$$

Als Gleichungssystem in A und B aufgefasst, hat dies genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die Determinante

$$\lambda\left((\cos 2\lambda\pi - 1)^2 + \sin^2 2\lambda\pi\right)$$

verschwindet. Dies ist offensichtlich nur für $\lambda \in \mathbb{Z}$ möglich (wir wählen $\lambda = k \in \mathbb{N}_0$).

Es verbleibt noch die Gleichung

$$P'' + \frac{1}{r}P' - \frac{k^2}{r^2}P = \frac{1}{r}\left((rP)' - \frac{k^2}{r}\right) = -\mu^2 P \tag{7.14}$$

unter der Randbedingung $P(R) = 0$ (bzw. $P'(R) = 0$) zu lösen. Eine zweite Randbedingung wird sich aus $|P(0)| < \infty$ ergeben. Die obige Gleichung ist der Besselschen Differentialgleichung sehr ähnlich und kann durch die Variablensubstitution $t = \mu r$ auf eine solche transformiert werden:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{dr} = \mu\frac{dP}{dt}$$
$$\frac{d^2P}{dr^2} = \frac{d^2P}{dt^2}\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \mu^2\frac{d^2P}{dt^2}$$

und somit

$$\frac{t^2}{\mu^2}\mu^2\ddot{P} + \frac{t}{\mu}\mu\dot{P} + (t^2 - k^2)P = 0.$$

Lösungen dieser Gleichung können durch die Bessel-Funktionen erster Art J_k und die Bessel-Funktionen zweiter Art Y_k angegeben werden (siehe Anhang A.2). Die Randbedingung, dass P im Ursprung beschränkt bleiben soll, führt dazu, dass der Anteil von Y_k an der Lösung verschwinden muss. Es gilt daher

$$P(r) = J_k(\mu r),$$

wobei nun noch die zweite Randbedingung $P(R) = 0$ (bzw. $P'(R) = 0$) erfüllt werden muss. Wir bezeichnen nun mit $\mu_i^{(k)}$ die i-te Nullstelle der k-ten Bessel-Funktion (bzw. mit $\nu_i^{(k)}$ die i-te Nullstelle der Ableitung der k-ten Bessel-Funktion); wegen der Gleichung (7.14) sind die Funktionen $J_k(\mu r)$ genau für

$$\mu = \frac{\mu_i^{(k)}}{R} \quad \text{bzw.} \quad \mu = \frac{\mu_i^{(k)}}{R}$$

Lösungen des obigen Randwertproblems.

Wir haben also spezielle Lösungen folgender Gestalt erhalten ($i \geq 1, k \geq 0$):

$$u_{i,k}(\vec{x}, t) = J_k\left(\frac{\mu_i^{(k)}}{R}r\right)(A\cos k\varphi + B\sin k\varphi)\exp\left(-\left(\frac{\mu_i^{(k)}}{aR}\right)^2 t\right)$$

(bzw. analoge Lösungen unter Verwendung von $\nu_i^{(k)}$). Es verbleibt noch nachzuprüfen, ob mit Linearkombinationen dieser Lösungen *alle* Anfangsbedingungen erfüllt werden können. Dazu bemerken wir wieder, dass nach dem Entwicklungssatz die Linearkombinationen der Eigenfunktionen von (7.14) dicht im Raum der stetigen Funktionen auf $[0, R]$ liegen; ebenso liegen die trigonometrischen Funktionen dicht im Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$. Dann liegen aber nach dem Satz von Stone-Weiterstraß die Produkte solcher Funktionen dicht im Raum der stetigen Funktionen auf dem Kreis.

Letztendlich müssen wir noch klären, wie die Koeffizienten in der Entwicklung einer Funktion $f(x) = f(r, \varphi)$ nach den oben erhaltenen Funktionen zu gewinnen sind. Dazu bemerken wir, dass wegen der Orthogonalität von Eigenfunktionen von Sturm-Liouville-Problemen die Lösungen $J_k\left(\frac{\mu_i^{(k)}}{R} r\right)$ paarweise orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle p, q\rangle = \int_0^R p(r)q(r)\ r\ dr$ sind. Daher sind alle erhaltenen speziellen Lösungen paarweise orthogonal bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \varphi)g(r, \varphi)\ r\ dr\ d\varphi.$$

Die Koeffizienten $a_i^{(k)}$ und $b_i^{(k)}$ in der Entwicklung

$$f(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(0)} J_0\left(\mu_i^{(0)} \frac{r}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right)\left(a_i^{(k)} \cos k\varphi + b_i^{(k)} \sin k\varphi\right)$$

können daher durch

$$\begin{aligned}
a_i^{(0)} &= \frac{1}{2\pi A_i^{(0)}} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_0\left(\mu_i^{(0)} \frac{r}{R}\right) f(r, \varphi) r\ dr\ d\varphi \\
A_i^{(0)} &= \int_0^R J_0\left(\mu_i^{(0)} \frac{r}{R}\right)^2 r\ dr \\
a_i^{(k)} &= \frac{1}{\pi A_i^{(k)}} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right) f(r, \varphi) r \cos k\varphi\ dr\ d\varphi \\
b_i^{(k)} &= \frac{1}{\pi A_i^{(k)}} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right) f(r, \varphi) r \sin k\varphi\ dr\ d\varphi \\
A_k^{(k)} &= \int_0^R J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right)^2 r\ dr
\end{aligned}$$

berechnet werden.

Als endgültige Lösung ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
u(\vec{x}, t) = u(r, \varphi, t) = &\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(0)} J_0\left(\mu_i^{(0)} \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{aR}\right)^2 t\right) + \\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right)\left(a_i^{(k)} \cos k\varphi + b_i^{(k)} \sin k\varphi\right) \exp\left(-\left(\frac{\mu_i^{(k)}}{aR}\right)^2 t\right),
\end{aligned}$$

bzw. ein analoger Ausdruck mit $\nu_i^{(k)}$. Im Falle einer radialsymmetrischen Anfangsbedingung treten nur die Terme mit J_0 auf.

A. Potenzreihenansätze bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

A.1. Lösungen bei regulären Koeffizienten

Definition A.1. Ein Punkt, in dem die Koeffizienten p und q der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

analytisch sind, heißt *regulärer Punkt* der Differentialgleichung.

Für eine solche Differentialgleichung kann man Lösungen mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

finden, wenn x_0 ein regulärer Punkt ist (Potenzreihenansatz).

Beispiel A.1 (Legendre'sche Differentialgleichung). Betrachte

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Hier ist $x_0 = 0$ ein regulärer Punkt.

Ansatz:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m.$$

In die Differentialgleichung eingesetzt liefert dies

$$(1 - x^2) \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1} + \nu(\nu+1) \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0,$$

also

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left((m+1)(m+2)a_{m+2} + (\nu - m)(\nu + m + 1)a_m \right) x^m = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformel

$$a_{m+2} = -\frac{(\nu - m)(\nu + m + 1)}{(m+1)(m+2)}, \quad a_m, m \geq 0.$$

Somit für

$$\begin{aligned}
m = 0: &\qquad a_2 = -\frac{\nu(\nu+1)}{1\cdot 2}a_0,\\
m = 1: &\qquad a_3 = -\frac{(\nu-1)(\nu+2)}{2\cdot 3}a_1,\\
m = 2: &\qquad a_4 = -\frac{(\nu-2)(\nu+3)}{3\cdot 4}a_2 = \frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}a_0,\\
m = 3: &\qquad a_5 = -\frac{(\nu-3)(\nu+4)}{4\cdot 5}a_3 = \frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+2)(\nu+4)}{5!}a_1.
\end{aligned}$$

Im Allgemeinen gilt also

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= (-1)^k \frac{\nu(\nu-2)\cdots(\nu+2-2k)(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2k-1)}{(2k)!}a_0,\\
a_{2k+1} &= (-1)^k \frac{(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-2k+1)(\nu+2)(\nu+4)\cdots(\nu+2k)\cdots(\nu+2k)}{(2k+1)!}a_1.
\end{aligned}$$

Damit folgt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in der Form

$$y(x) = a_0 p_\nu(x) + a_1 q_\nu(x)$$

mit

$$\begin{aligned}
p_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\nu(\nu-2)\cdots(\nu+2-2k)(\nu+1)\cdots(\nu+2k-1)}{(2k)!}x^{2k},\\
q_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-2k+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die beiden Reihen konvergieren für $|x| < 1$, die Funktionen p_ν und q_ν sind linear unabhängig.

Spezialfall $\nu = n \in \mathbb{N}$.

Rekursionsformel

$$a_{m+2} = -\frac{(\nu-m)(\nu+m+1)}{(m+1)(m+2)}\,a_m,\ m \geq 0,$$

Für $m = n$ folgt daher

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0.$$

Für n gerade bricht die Reihe $p_n(x)$ bei x^n ab, die Reihe $q_n(x)$ bricht nicht ab.

Für n ungerade bricht umgekehrt die Reihe $p_n(x)$ nicht ab, die Reihe $q_n(x)$ bricht bei x^n ab.

Die allgemeine Lösung enthält daher auf jeden Fall ein Polynom $P_n(x)$ und eine unendliche Reihe $Q_n(x)$.

Um P_n anzugeben, ist es üblich, a_n so zu wählen, dass $P_n(1) = 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}, \\
a_{n-2} &= -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)} a_n = -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!}, \\
a_{n-4} &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}, \\
a_{n-2k} &= \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!},
\end{aligned}$$

also

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

mit

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}$$

Für Q_n gilt

$$Q_n(x) = \begin{cases} p_n(1) q_n(x) & n \text{ gerade} \\ -q_n(1) p_n(x) & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad |x| < 1$$

(die LEGENDRE-Funktion 2. Art).

Die allgemeine Lösung ist dann

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A.2. Lösungen bei schwach singulären Koeffizienten

Definition A.2. Die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

haben in $x = x_0$ eine Singularität. Der Punkt x_0 heißt *schwach singulär*, falls die Funktionen

$$(x - x_0) \cdot p(x) \quad \text{und} \quad (x - x_0)^2 \cdot q(x)$$

in x_0 analytisch sind.

Die Potenzreihenmethode ist dann nicht mehr direkt anwendbar. Man verwendet einen modifizierten Ansatz von der Form

$$y(x) = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad s \in \mathbb{R}\,,\ a_0 \neq 0$$

(FROBENIUS-Methode).

Beispiel A.2 (BESSEL'sche Differentialgleichung). Betrachte

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \nu \geq 0\,. \tag{A.1}$$

Sei zunächst $x > 0$. Somit ist $x_0 = 0$ ein schwach singulärer Punkt. Der Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

führt auf

$$(s^2 - \nu^2) a_0 x^s + \left((s+1)^2 - \nu^2\right) a_1 x^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\left((s+n)^2 - \nu^2\right) a_n + a_{n-2}\right) x^{n+s} = 0\,.$$

Wegen $a_0 \neq 0$ liefert die Forderung

$$(s^2 - \nu^2) a_0 = 0$$

(Index-Gleichung) die Relation

$$s_{1,2} = \pm\nu\,.$$

Wegen $\nu > 0$ verschwindet für $s_1 = \nu$ die Lösung y von (A.1) im Ursprung, für $s_2 = -\nu$ wird die Lösung im Ursprung unendlich!

1. $s_1 = \nu$:

$$\begin{aligned} (2\nu + 1) a_1 = 0 \qquad & \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_n = -\frac{-a_{n-2}}{n(2\nu + n)}, & \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0, && k = 1, 2, 3, \ldots, \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 1)}, && k = 1, 2, 3, \ldots\,. \end{aligned}$$

Um für die Koeffizienten a_{2k} eine kompakte Schreibweise zu erzielen, führen wir die Gamma-Funktion ein.

Gamma-Funktion Die Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ ist definiert als

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \text{(konvergent für } x > 0)$$

Es gilt

$$\Gamma(1) = 1.$$

Partielle Integration liefert

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x),$$

also

$$\Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma(4) = 6,$$

im Allgemeinen

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

$\Gamma(x)$ ist also eine Verallgemeinerung der Fakultät! □

Die Koeffizienten a_{2k} von vorhin können damit angegeben werden in der Form

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^\nu\, \Gamma(\nu+1) a_0}{2^{2k+\nu} k!\, \Gamma(\nu+1+k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

Damit erhält man

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^\nu\, \Gamma(\nu+1)}{2^{2k+\nu} k!\, \Gamma(\nu+k+1)} x^{2k+\nu}.$$

Es ist üblich,

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\, \Gamma(\nu+1)}$$

zu wählen und die Lösung dann mit J_ν zu bezeichnen:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!\, \Gamma(\nu+k+1)}$$

(Bessel-Funktion 1. Art zum Index ν). Diese Funktion liefert eine reguläre Lösung der Differentialgleichung (A.1).

2. $s_2 = -\nu$:
   Wir erhalten zunächst

   $$(-2\nu+1) a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

   mit der Forderung $\nu \neq \frac{1}{2}$. (Der Fall $\nu = \frac{1}{2}$ wird später behandelt.)

   Mit der Rekursionsformel

   $$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2\nu)}, \quad n \geq 2,$$

   erhalten wir die Bessel-Funktion 1. Art zum Index $-\nu$:

   $$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu} k!\, \Gamma(-\nu+k+1)}.$$

Bemerkung (ohne Beweis). J_ν, $J_{-\nu}$ konvergieren für alle x, sie sind linear unabhängig, falls $\nu \notin \mathbb{N}$.

Die allgemeine Lösung von (A.1) ist dann

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

Falls $\nu = n, n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(x) = \infty \quad \text{für } x = 0, -1, -2, -3, \ldots,$$

also

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k-n}}{2^{2k-n} k!} \cdot \underbrace{\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)}}_{=0} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-n}}{2^{2k-n} k!\,\Gamma(-n+k+1)} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n} k!\,\Gamma(n+k+1)} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

J_n und J_{-n} sind also linear abhängig!

Gesucht ist nun eine zweite, von J_n linear unabhängige Lösung. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, eine davon ist

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

(ohne Beweis).

Für $\nu \notin \mathbb{Z}$ ist Y_ν eine Linearkombination von J_ν und $J_{-\nu}$, linear unabhängig von J_ν.

Für $\nu = n, n \in \mathbb{N}$ ist Y_n zunächst nicht definiert, aber es gilt

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x).$$

Dieser Grenzwert existiert, ist Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung und linear unabhängig von J_n.

$Y_\nu(x)$ wird die Bessel-Funktion 2. Art zum Index ν genannt.

Die Lösung ist in diesem Fall also

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x), \quad \nu \geq 0.$$

Im Fall $\nu = \pm\frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, & x > 0, \\ J_{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, & x > 0 \end{aligned}$$

(ohne Beweis).