8. Weisen Sie den Integralsatz von Gauß für das Kurvenintegral

$$\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (x+y)\,dy$$

nach, wobei C die Berandung der Ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

bezeichnet.

9. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_C (x^2 - y^3 + z^2)\,dx + (xy - z^2)\,dy + 2xz\,dz.$$

Dabei ist C die Schnittkurve der beiden Flächen $(x-y)^2 + z^2 = 2$ und $x+y+z=0$, die von $P(1,1,1)$ aus gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert ist.

10. Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z)$ durch die Fläche S:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2xy + z \\ y^2 \\ -x - 3y \end{pmatrix}, \qquad S:\ 2x + 2y + z = 6, \quad x, y, z \geq 0.$$

11. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie für alle $\mathbf{x} \in U$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \oiint_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=r} f(\mathbf{y})\,do(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{6} \Delta f(\mathbf{x}).$$

Hinweis: ersetzen Sie f um $\mathbf{x}$ durch das Taylor-Polynom zweiter Ordnung und nützen Sie Symmetrien aus.