12. Sei $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Für $a \in \mathbb{R}^3$ sei $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ durch $F(x) := f(\|x - a\|)$ erklärt. Zeigen Sie

$$\Delta F(x) = f''(\|x-a\|) + \frac{2}{\|x-a\|}.\, f'(\|x-a\|)$$

13. Beweisen Sie den folgenden Satz (Eulerscher Satz für homogene Funktionen):
Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und homogen vom Grade α (d. h., gilt $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t > 0$), so besteht die Eulersche Relation

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} x_n = \alpha f(x).$$

14. Stellen Sie $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten dar.

15. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{O}} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} d\vec{o},$$

wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Bereichs

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

bezeichnet. Berechnen Sie das Integral auch mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.