24. Bestimmen Sie die Green-Funktion für die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}.$$

Geben Sie damit die entsprechende Poissonsche Integralformel für $\mathbb{H}$ an.
Hinweis: Die auftretenden uneigentlichen Integrale über die x-Achse bzw. über $\mathbb{H}$ können Sie dabei ohne weiteres als konvergent annehmen. Eine ähnliche Idee, nämlich Spiegelung, wie bei der Bestimmung der Green-Funktion für den Kreis führt auch hier zum Ziel, sogar viel einfacher.

25. Zeigen Sie, dass das n-te Legendre-Polynom P_n gegeben durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$$

die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

erfüllt.
Hinweis: Beginnen Sie mit der Gleichung $(x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n = 2nx(x^2 - 1)^n$ und differenzieren Sie diese $n + 1$-mal unter Verwendung der Leibnizschen Produktregel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)};$$

die meisten der Ableitungen der jeweils ersten Faktoren fallen weg.

26. Zeigen Sie für die in Beispiel 25 definierten Legendre-Polynome P_n, dass für $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0$$

gilt. Hinweis: Wenden Sie dafür mehrfach partielle Integration an.

27. Aus der Darstellung des „Kerns“

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nt) r^n$$

folgt, dass $\cos(nt)$ als Polynom in $\cos(t)$ ausgedrückt werden kann, also

$$T_n(\cos(t)) = \cos(nt).$$

Die Polynome T_n heißen Tschebyschew-Polynome. Bestimmen Sie T_n für $n = 2, 3, 4$.