

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Stellen Sie $\cos(nx)$ und $\frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}$ als Polynome in $\cos x$ dar:

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

$$U_n(\cos(x)) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}.$$

Geben Sie geschlossene Ausdrücke für die *erzeugenden Funktionen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(\cos(x)) z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\cos(x)) z^n$$

an.

2. Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sie $|z_0| < R$. Durch Umordnen erhalten Sie eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

mit

$$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k z_0^{k-n}.$$

Zeigen Sie, dass diese Potenzreihe einen Konvergenzradius $\geq R - |z_0|$ hat.

3. Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit nicht negativen Koeffizienten und Konvergenzradius $R > 0$. Sei $0 < z_0 < R$. Zeigen Sie dass dann in Beispiel 2 der Konvergenzradius der umgeordneten Reihe gleich $R - z_0$ ist.

4. Welche Funktionen werden durch die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

dargestellt?

5. Zeigen Sie, dass die Menge (Hamiltonsche Quaternionen)

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

mit der Matrizenaddition und -multiplikation ein Schiefkörper ist (ein Schiefkörper besitzt alle Eigenschaften eines Körpers mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation).