16. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

$$(a) \oint_{C_a} \frac{z^2+z+1}{(z-i)^2}\,dz \quad (b) \oint_{C_b} \frac{e^z}{(z+1)^3}\,dz \quad (c) \oint_{C_c} \frac{z}{(z+1)(z+3)}\,dz,$$

wobei C_a das positiv orientierte Rechteck mit Ecken $-1, 1, 1+2i, -1+2i$, C_b den Kreis mit Radius 2 um $z = 0$ und C_c das Rechteck mit Ecken $2 \pm i$ und $-2 \pm i$ bezeichnen.

17. Sei $f \in H(\mathbb{C})$ und gelte $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ für Konstante $A, B > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom mit Grad $\leq k$ ist.

18. Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ sind durch

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

definiert. Zeigen Sie die Integraldarstellung

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x + \sqrt{1-x^2}\cos t\right)^n dt \quad \text{für } |x| < 1,$$

indem Sie die obige Ableitung als komplexes Kurvenintegral darstellen.

19. Verwenden Sie die Cauchyschen Abschätzungen für $f(z) = \exp(z)$, um die Ungleichung

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

zu beweisen.

20. Seien P und Q Polynome und es gelte $\deg P \leq \deg Q - 2$. Was können Sie über

$$\lim_{R\to\infty} \oint\limits_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

aussagen? Was geschieht, wenn $\deg P = \deg Q - 1$?