21. Finden Sie ein Analogon zur Poissonschen Integralformel für harmonische Funktionen in der oberen Halbebene unter der Annahme, dass die Funktionen hinreichend stark abfallen, um den Grenzübergang

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

für $C_R = \partial\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R, \Im(z) \geq 0\}$ zu gewährleisten.

22. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Regelfunktion. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \phi) + r^2} f(t)\, dt = \frac{1}{2}\left(f(\phi-) + f(\phi+)\right)$$

für alle $\phi \in \mathbb{R}$ gilt.

23. Bestimmen Sie die konjugiert harmonische Funktion zu

$$u(x, y) = e^x((x + 1)\cos x - y \sin x).$$

24. Bestimmen Sie jene Lösung von $\triangle u = 0$, für die

$$u(\cos t, \sin t) = t(2\pi - t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

25. Entwickeln Sie $\frac{e^z-1}{z}$ um $z = 0$ in eine Potenzreihe. Zeigen Sie, dass $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ um $z = 0$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Reihe? Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, dann gilt $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \geq 1$.