

26. Geben Sie ein Beispiel für eine ganze Funktion  $f$  an, für die

$$|f(z)| \leq e^{A|z|^\alpha}$$

für  $A > 0$  und ein (möglichst kleines)  $\alpha < 1$  gilt. Polynome gelten nicht.

27. Sei  $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge holomorpher Funktionen, die durch ihre Potenzreihenentwicklungen um  $a \in \Omega$  gegeben sind:

$$f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(z-a)^n.$$

Die Reihe  $F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$  konvergiere gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\Omega$ . Zeigen Sie, dass dann

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_n^{(j)}(z-a)^n$$

gilt.

28. Verwenden Sie Beispiel 27, um die Potenzreihenentwicklung von

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}$$

um  $z_0 = 0$  zu bestimmen.

29. Die Besselfunktionen zu ganzzahligem Index sind gegeben durch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n = \exp\left(\frac{\alpha}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

Geben Sie die Potenzreihenentwicklung von  $J_n(\alpha)$  um  $\alpha_0 = 0$  an und beweisen Sie

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt - \alpha \sin t) dt.$$

30. Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen von

$$f(z) = \frac{z+1}{(1-z)^2(z+2)}$$

um  $z_0 = 0$  für die Kreisringe  $|z| < 1$ ,  $1 < |z| < 2$  und  $|z| > 2$ .