

41. Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

indem Sie

$$\oint \frac{z}{\exp(z) - 1} \frac{dz}{z^{2k+1}}$$

einerseits über den Kreis mit Radius 1 und andererseits über Kreise mit Radius $(2N+1)\pi$ ($N \in \mathbb{N}$) für $N \rightarrow \infty$ berechnen.

42. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um $w = 0$ der Funktion $z(w)$, die durch

$$w(1+z)^t = z, \quad t \in \mathbb{N}$$

implizit gegeben ist. Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

43. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^z = 3z^2$ im Einheitskreis genau zwei Lösungen besitzt.

44. Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 - z + 16 = 0$$

im Bereich $1 < |z| < 2$ liegen.

45. Sei

$$Q_n(z) = \frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{Q_n(z)}{z+\alpha} dz, \quad \alpha \notin \mathbb{N}_0$$

um eine geschlossene Formel für

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\alpha} \binom{n}{k}$$

zu finden. Was ergibt sich für $\alpha = 0$?