51. Bestimmen Sie jene Möbius-Transformation ϕ, die folgende Gleichungen erfüllt:

$$\phi(i) = 0, \quad \phi(0) = -2, \quad \phi(1) = -2i.$$

52. Geben Sie eine ganze Funktion an, die genau in den Punkten $\pm\sqrt{n}$ und $\pm i\sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ einfache Nullstellen besitzt.

53. Konstruieren Sie eine ganze Funktion, für die

$$f(n) = 1, \quad f'(n) = 0, \quad f(-n) = -1, \quad f'(-n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

sowie $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ gilt.

54. Für eine ganze Funktion f definiert man

$$N_f(R) = \sum_{|z|<R} \operatorname{ord}_z(f),$$

also die Anzahl der Nullstellen von f mit Betrag $< R$ mit Vielfachheit gezählt. Sei f eine Funktion, für die

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N_f(R)}{R^\alpha} = 0$$

für ein $\alpha < 1$ gilt. Zeigen Sie, dass f dann in der Form

$$f(z) = z^k \exp(g(z)) \prod_{\substack{f(\zeta)=0\\ \zeta\neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{\operatorname{ord}_\zeta(f)}$$

mit $k \geq 0$ und einer ganzen Funktion g geschrieben werden kann.

55. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|1 - re^{i\theta}\right| \, d\theta = \max(0, \ln r)$$

für $r \geq 0$. Verwenden Sie dieses Ergebnis, um für ein Polynom p mit $p(0) \neq 0$ das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|p(e^{i\theta})\right| d\theta$$

zu berechnen.