6. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

$$(a) \oint_{C_a} \frac{z^2+z+1}{(z-i)^2}\,dz \quad (b) \oint_{C_b} \frac{e^z}{(z+1)^3}\,dz \quad (c) \oint_{C_c} \frac{z}{(z+1)(z+3)}\,dz,$$

wobei C_a das positiv orientierte Rechteck mit Ecken $-1, 1, 1+2i, -1+2i$, C_b den Kreis mit Radius 2 um $z=0$ und C_c das Rechteck mit Ecken $2 \pm i$ und $-2 \pm i$ bezeichnen.

7. Welche Funktionen werden durch die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

dargestellt?

8. Benützen Sie

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

um die Integrale

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx$$

zu berechnen. (Hinweis: integrieren Sie $\exp(-z^2)$ über den Integrationsweg $z=t$, $t \in [0,R]$, $z = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $z = te^{\pi i/4}$, $t \in [0,R]$.)

9. Sei $f \in H(\mathbb{C})$ und gelte $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ für Konstante $A, B > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom mit Grad $\leq k$ ist.

10. Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ sind durch

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

definiert. Zeigen Sie die Integraldarstellung

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{1-x^2}\cos t\right)^n\,dt \quad \text{für } |x| < 1,$$

indem Sie die obige Ableitung als komplexes Kurvenintegral darstellen.