

20. Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 - z + 16 = 0$$

im Bereich $1 < |z| < 2$ liegen.

21. Zeigen Sie: Seien $|a_m| < 1$ für $m = 1, \dots, n$ und $|b| < 1$. Dann nimmt die Funktion

$$f(z) = \prod_{m=1}^n \frac{z - a_m}{1 - \overline{a_m}z}$$

den Wert b im Inneren des Einheitskreises genau n mal an.

22. Berechnen Sie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

indem Sie

$$\oint \frac{1}{z^2 + z + 1} \pi \cot \pi z \, dz$$

über das Quadrat mit den Eckpunkten $\pm(N + \frac{1}{2})(1 + \pm i)$, $N \in \mathbb{N}$ integrieren und den Grenzwert für $N \rightarrow \infty$ bestimmen.

23. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um $w = 0$ der Funktion $z(w)$, die durch

$$w(1 + z)^t = z, \quad t \in \mathbb{N}$$

implizit gegeben ist. Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

24. Finden Sie analog zur Lagrangeschen Inversionsformel eine Formel für die Potenzreihenentwicklung von $g \circ f^{(-1)}(z)$, für Funktionen f und g , die auf einer Kreisscheibe um 0 holomorph sind, mit $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$. Wenden Sie das Ergebnis an, um die Potenzreihenentwicklung von

$$\log \frac{1}{1 - W(z)}$$

zu bestimmen (W ist die Lambert-Funktion).